FONCTIONS VECTORIELLES

Plan du cours

I. Dérivabilité des fonctions vectorielles 1
I. 1. Définitions et propriétés 1
I. 2. Opérations sur les fonctions dérivables 3
II. Fonctions vectorielles de classe $\mathscr{C}^k$ 4
II. 1. Définitions et propriétés 4
II. 2. Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ 5
II. 3. Développement limité d'une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ 6
III. Arcs paramétrés 6
III. 1. Généralités 6
III. 2. Points réguliers et singuliers, tangente 7
III. 3. Étude des branches infinies 9
III. 4. Plan d'étude d'une courbe plane 10
III. 5. Longueur d'un arc paramétré 10

Les fonctions considérées dans la suite sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et sont à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ pour $n \geqslant 1$.

I. Dérivabilité des fonctions vectorielles

I. 1. Définitions et propriétés

Définition 1 – *Dérivabilité*

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ une fonction.

- Soit $a \in \mathrm{I}$. On dit que f *est dérivable en* a si le taux d'accroissement τ_a de f en a défini sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$ par :
$$\tau_a(t) = \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$
admet une limite finie dans $\mathbb{R}^n$ lorsque t tend vers a.
Le cas échéant, cette limite est alors appelée *nombre dérivé de f en a* et est notée $f'(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(a)$.
- On dit que f *est dérivable sur* I si elle est dérivable en tout point de I.
Dans ce cas, la fonction $t \mapsto f'(t)$ définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est appelée la *dérivée de f*.

Notation On notera $\mathscr{D}(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ dérivables sur I.

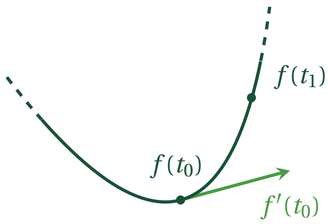
Remarque La limite de la fonction $\tau_a : \mathrm{I} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}^n$ est dans le cadre du chapitre sur les espaces vectoriels normés. En particulier, la norme définie sur $\mathbb{R}^n$ n'a pas d'influence sur la valeur de la limite.

Interprétation cinématique

Si $n = 2$ ou $n = 3$ et que la position d'un point matériel M_t dépend du temps, on peut lui associer la fonction :

$$f : t \mapsto \overrightarrow{\mathrm{OM}_t}$$

- L'ensemble des $f(t)$ pour t dans l'intervalle I de définition est la *trajectoire du point* M_t.
- Si la fonction f est dérivable sur I, pour $t_0 \in \mathrm{I}$, le vecteur $f'(t_0)$ est le *vecteur vitesse instantané* du point M_t à l'instant t_0.



Proposition 1 – *Dérivabilité et développement limité à l'ordre* 1

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ une fonction, $a \in \mathrm{I}$ et $v \in \mathbb{R}^n$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(1) La fonction f est dérivable en a et $f'(a) = v$.

(2) Il existe une fonction $\varepsilon : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ vérifiant $\lim\limits_{t \to a} \varepsilon(t) = 0$ et :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad f(t) = f(a) + (t-a)v + (t-a)\varepsilon(t)$$

Remarque L'assertion **(2)** exprime le fait que f possède un développement limité à l'ordre 1 en a.

Proposition 2 – *Dérivabilité implique continuité*

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ une fonction et $a \in \mathrm{I}$.

- Si la fonction f est dérivable en a alors elle continue en a.
- Si la fonction f est dérivable sur I alors elle continue sur I.

Remarque La réciproque est fausse.

On rappelle que si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ est une fonction et si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, on appelle *fonctions coordonnées de f dans la base $\mathscr{B}$* les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ définies sur I et à valeurs réelles vérifiant :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) e_i$$

En particulier, si $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, cela donne :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$$

Proposition 3 – *Dérivabilité et fonctions coordonnées*

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ une fonction et $a \in \mathrm{I}$. On introduit $f_1, \ldots, f_n$ les fonctions coordonnées de f dans une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

- La fonction f est dérivable en a si et seulement si chacune des fonctions coordonnées de f est dérivable en a. On a alors dans ce cas :

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(a) e_i$$

- La fonction f est dérivable sur I si et seulement si chacune des fonctions coordonnées de f est dérivable sur I. On a alors dans ce cas :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad f'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(t) e_i$$

REMARQUE Lorsque $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a donc, si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ est dérivable sur I :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad f'(t) = (f_1'(t), \dots, f_n'(t))$$

EXEMPLE 1

On définit deux fonctions f et g en posant :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (-\sin t, \cos t) \end{array}$$

Prouver que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et exprimer leurs dérivées.

PROPOSITION 4 – *Caractérisation des fonctions constantes*

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ une fonction.
Alors f est constante sur I si et seulement si elle est dérivable et de dérivée nulle sur I.

I. 2. OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES

PROPOSITION 5 – *Combinaison linéaire*

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ et $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions, $a \in \mathrm{I}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si f et g sont dérivables en a alors $\lambda f + g$ est dérivable en a et :

$$(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a)$$

- Si f et g sont dérivables sur I alors $\lambda f + g$ est dérivable sur I et :

$$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$$

PROPOSITION 6 – *Composition par une application linéaire*

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ une fonction, $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire et $a \in \mathrm{I}$.

- Si f est dérivable en a alors $u \circ f$ est dérivable en a et :

$$(u \circ f)'(a) = u(f'(a))$$

- Si f est dérivable sur I alors $u \circ f$ est dérivable sur I et :

$$(u \circ f)' = u \circ f'$$

PROPOSITION 7 – *Application bilinéaire et dérivation*

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ et $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^p$ deux fonctions, $\mathrm{B} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une application bilinéaire et $a \in \mathrm{I}$.

- Si f et g sont dérivables en a alors $\mathrm{B}(f, g)$ est dérivable en a et :

$$\mathrm{B}(f, g)'(a) = \mathrm{B}(f'(a), g(a)) + \mathrm{B}(f(a), g'(a))$$

- Si f et g sont dérivables sur I alors $\mathrm{B}(f, g)$ est dérivable sur I et :

$$\mathrm{B}(f, g)' = \mathrm{B}(f', g) + \mathrm{B}(f, g')$$

NOTATION Dans le résultat précédent, la notation $B(f, g)$ désigne la fonction $t \mapsto B(f(t), g(t))$.

APPLICATIONS UTILES

- **Dérivation d'une multiplication par une fonction scalaire**
  Si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}^n$ sont deux fonctions dérivables sur I alors φf est dérivable sur I avec :
  $$(\varphi f)' = \varphi' f + \varphi f'$$
  On utilise l'application bilinéaire $B(\alpha, x) = \alpha x$ pour $(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.
- **Dérivation d'un produit scalaire**
  On suppose $\mathbb{R}^n$ muni d'un produit scalaire noté $(\cdot \mid \cdot)$. Si $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $g : I \to \mathbb{R}^n$ sont deux fonctions dérivables sur I alors $(f \mid g)$ est dérivable sur I avec :
  $$(f \mid g)' = (f' \mid g) + (f \mid g')$$
  On utilise l'application bilinéaire $B(x, y) = (x \mid y)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
- **Dérivation d'un produit vectoriel**
  On suppose $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et orientée. Si $f : I \to \mathbb{R}^3$ et $g : I \to \mathbb{R}^3$ sont deux fonctions dérivables sur I alors $f \wedge g$ est dérivable sur I avec :
  $$(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$$
  On utilise l'application bilinéaire $B(x, y) = x \wedge y$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.
- **Dérivation d'un déterminant**
  Étant donnée une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^2$, si $f : I \to \mathbb{R}^2$ et $g : I \to \mathbb{R}^2$ sont deux fonctions dérivables sur I alors leur déterminant dans la base $\mathscr{B}$, $\det_{\mathscr{B}}(f, g)$, est dérivable sur I avec :
  $$\det_{\mathscr{B}}(f, g)' = \det_{\mathscr{B}}(f', g) + \det_{\mathscr{B}}(f, g')$$
  On utilise l'application bilinéaire $B(x, y) = \det_{\mathscr{B}}(x, y)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

PROPOSITION 8 – *Composition de deux fonctions dérivables*

Soient $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $\varphi : J \to I$ deux fonctions et $\alpha \in J$.

- Si φ est dérivable en α et si f est dérivable en $a = \varphi(\alpha)$ alors $f \circ \varphi$ est dérivable en α et :
  $$(f \circ \varphi)'(\alpha) = \varphi'(\alpha) f'(\varphi(\alpha))$$
- Si φ est dérivable sur J et si f est dérivable sur I alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur J et :
  $$(f \circ \varphi)' = \varphi'(f' \circ \varphi)$$

REMARQUE Dans l'écriture $\varphi'(\alpha) f'(\varphi(\alpha))$, bien remarquer que, à gauche, $\varphi'(\alpha)$ est un scalaire que l'on multiplie, à droite, par le vecteur $f'(\varphi(\alpha))$.

II. FONCTIONS VECTORIELLES DE CLASSE $\mathscr{C}^k$

II. 1. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

DÉFINITION 2 – *Dérivée k−ème*

Soient $f : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction et $k \in \mathbb{N}$.
Par récurrence, on pose $f^{(0)} = f$ et, si $k \geqslant 1$, on dit que f est *k fois dérivable sur* I si $f^{(k-1)}$ est dérivable sur I et on note $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$.

NOTATION On notera $\mathscr{D}^k(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ k fois dérivables sur I.

DÉFINITION 3 – *Classes $\mathscr{C}^k$ et $\mathscr{C}^\infty$*

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ une fonction et $k \in \mathbb{N}$.
On dit que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I lorsqu'elle est k fois dérivable et que $f^{(k)}$ est continue sur I.
On dit que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I lorsqu'elle est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

NOTATION On notera $\mathscr{C}^k(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n)$ et $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ de classes $\mathscr{C}^k$ et $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

REMARQUE Si $p \leqslant k$ sont deux entiers naturels, alors $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n) \subset \mathscr{C}^k(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n) \subset \mathscr{C}^p(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n)$.

PROPOSITION 9 – *Classe $\mathscr{C}^k$ et fonctions coordonnées*

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ une fonction et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On introduit de nouveau $f_1, \ldots, f_n$ les fonctions coordonnées de f dans une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.
Alors la fonction f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I si et seulement si chacune des fonctions coordonnées de f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

II. 2. OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DE CLASSE $\mathscr{C}^k$

De façon analogue au cas de la dérivabilité, la classe $\mathscr{C}^k$ se comporte bien vis-à-vis des opérations suivantes.

PROPOSITION 10 – *Combinaison linéaire*

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ et $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^k$ sur I alors $\lambda f + g$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et :

$$\forall p \in [\![0, k]\!], \quad (\lambda f + g)^{(p)} = \lambda f^{(p)} + g^{(p)}$$

REMARQUE Autrement dit, l'ensemble $\mathscr{C}^k(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n)$ a une structure d'espace vectoriel.

PROPOSITION 11 – *Composition par une application linéaire*

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ une fonction, $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
Si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I alors $u \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et :

$$\forall p \in [\![0, k]\!], \quad (u \circ f)^{(p)} = u \circ f^{(p)}$$

PROPOSITION 12 – *Application bilinéaire et classe $\mathscr{C}^k$, formule de Leibniz*

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ et $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^p$ deux fonctions, $\mathrm{B} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une application bilinéaire et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^k$ sur I alors $\mathrm{B}(f, g)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et :

$$\mathrm{B}(f, g)^{(k)} = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \mathrm{B}(f^{(\ell)}, g^{(k-\ell)})$$

PROPOSITION 13 – *Composition de deux fonctions dérivables*

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ et $\varphi : \mathrm{J} \to \mathrm{I}$ deux fonctions et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
Si φ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J et si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J.

II. 3. Développement limité d'une fonction de classe $\mathscr{C}^k$

Théorème 1 – *Théorème de Taylor-Young*

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ une fonction définie sur un intervalle I et $a \in \mathrm{I}$.
Si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I alors f admet un développement limité à l'ordre k en a donné par :

$$f(t) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^i + \underset{a}{o}((t-a)^k)$$

Remarques

- Le terme $\underset{a}{o}((t-a)^k)$ peut aussi être écrit $(t-a)^k\varepsilon(t)$ pour une fonction $\varepsilon : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ vérifiant $\lim_a \varepsilon = 0$.
- En pratique, en notant $f_1, \ldots, f_n$ les fonctions coordonnées de f dans une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$, on peut obtenir un développement limité de f à l'ordre k en a en calculant un développement limité à l'ordre k en a de chaque f_i et en les « recombinant ».

Exemple 2

Justifier que la fonction $f : t \in \mathbb{R} \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t) \in \mathbb{R}^2$ admet un développement limité en 0 à l'ordre 4 et le calculer.

III. Arcs paramétrés

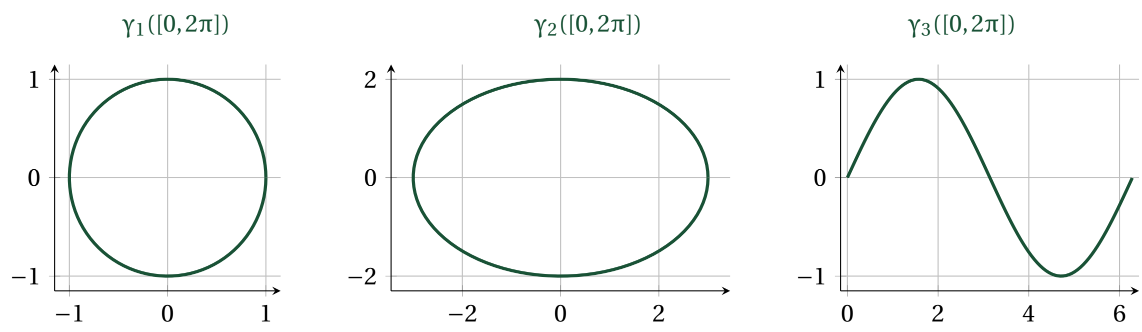
III. 1. Généralités

Définition 4 – *Arc paramétré*

On appelle *arc paramétré* tout couple (I, γ) où I est un intervalle non vide et non réduit à un point de $\mathbb{R}$ et γ une fonction de I dans $\mathbb{R}^n$. Le sous-ensemble $\gamma(\mathrm{I})$ de $\mathbb{R}^n$ est appelé *support* de l'arc paramétré (I, γ).
Si $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on dit que l'arc (I, γ) est de classe $\mathscr{C}^k$ si la fonction γ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

Exemples

- Si l'on définit $\gamma_1 : t \in [0, 2\pi] \mapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$, l'arc paramétré $([0, 2\pi], \gamma_1)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et son support est le cercle unité dans le plan $\mathbb{R}^2$.
- Si l'on définit $\gamma_2 : t \in [0, 2\pi] \mapsto (3\cos t, 2\sin t) \in \mathbb{R}^2$, l'arc paramétré $([0, 2\pi], \gamma_2)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et son support est une ellipse dans le plan $\mathbb{R}^2$.
- On introduit $\gamma_3 : t \in \mathbb{R} \mapsto (t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$. L'arc paramétré $(\mathbb{R}, \gamma_3)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et son support est la courbe représentative de la fonction sinus dans le plan $\mathbb{R}^2$.



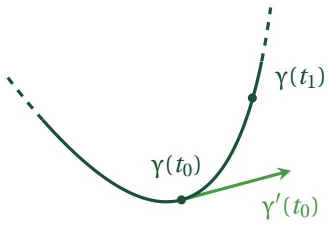
Remarque En définissant $\gamma_4 : t \in [0, 4\pi] \mapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$, le support de l'arc paramétré $([0, 4\pi], \gamma_4)$ est le même que l'arc paramétré $([0, 2\pi], \gamma_1)$ précédent : les points du cercle unité sont tous obtenus deux fois.

Pour un arc paramétré (I, γ), un point du support $\gamma(I)$ est dit *simple* s'il est obtenu pour une unique valeur de $t \in I$; sinon il est dit *multiple*.

Interprétation cinématique

Lors de l'étude du mouvement d'un point matériel mobile sur un intervalle de temps I dont la position à l'instant $t \in I$ est donnée par $\gamma(t)$, on a affaire à un arc paramétré (I, γ).

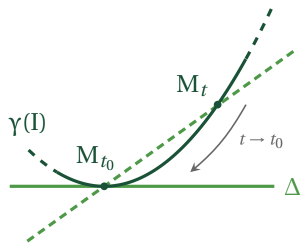
- Le support de l'arc (I, γ) est appelé la trajectoire du point matériel.
- Dans ce cas, les vecteurs $\gamma'(t)$ et $\gamma''(t)$ sont les *vecteur vitesse* et *vecteur accélération* du point matériel à l'instant $t \in I$.



III. 2. Points réguliers et singuliers, tangente

Définition 5 – *Tangente en un point d'un arc paramétré*

Soient (I, γ) un arc paramétré et $t_0 \in I$. On pose $M_t = \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ pour tout $t \in I$. Si la droite $(M_{t_0} M_t)$ admet une position limite lorsque t tend vers t_0, on dit que l'arc paramétré (I, γ) admet une *tangente au point* M_{t_0} *de paramètre* t_0 ; la droite limite est appelée *tangente à l'arc paramétré* (I, γ) *au point de paramètre* t_0.



Remarque Si $t \in I$, la droite $(M_{t_0} M_t)$ est dirigée par le vecteur $\gamma(t) - \gamma(t_0)$ (sous réserve que $\gamma(t) \neq \gamma(t_0)$).

Définition 6 – *Point régulier, point singulier*

Soient (I, γ) un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$ et $t_0 \in I$.
Le point $M_{t_0} = \gamma(t_0)$ de paramètre t_0 de l'arc paramétré (I, γ) est dit *régulier* si $\gamma'(t_0) \neq 0$. Sinon, il est dit *singulier* ou *stationnaire*.
L'arc paramétré (I, γ) est dit *régulier* lorsque tous ses points sont réguliers.

Proposition 14 – *Tangente en un point régulier*

Soient (I, γ) un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$ et $t_0 \in I$.
Si le point $M_{t_0} = \gamma(t_0)$ de paramètre t_0 de l'arc paramétré (I, γ) est régulier alors l'arc paramétré (I, γ) admet pour tangente en ce point la droite passant par M_{t_0} et dirigée par $\gamma'(t_0)$.

Méthode – *Tangente en un point régulier*

On se donne un arc paramétré (I, γ) de classe $\mathscr{C}^1$. Si $M_{t_0} = \gamma(t_0)$ est un point régulier de l'arc paramétré (I, γ) pour $t_0 \in I$, on cherche à déterminer la tangente à l'arc paramétré (I, γ) en ce point.

- La tangente passe par le point $\gamma(t_0)$ et est dirigée par le vecteur $\gamma'(t_0)$.
- En dimension 2, on peut obtenir l'équation de cette tangente en observant qu'un point $P \in \mathbb{R}^2$ est sur cette tangente si et seulement si les vecteurs $P - \gamma(t_0)$ et $\gamma'(t_0)$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si on a $\det(P - \gamma(t_0), \gamma'(t_0)) = 0$.

Exemple 3

On définit $\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$.
Donner les tangentes à l'arc paramétré $([0, 2\pi], \gamma)$ aux points de paramètre $t_0 = 0$ et $t_0 = \pi/2$.

PROPOSITION 15 – *Tangente en un point a priori singulier*

Soient (I,γ) un arc paramétré et $t_0 \in \mathrm{I}$.
S'il existe, on note p le plus petit entier non nul tel que $\gamma^{(p)}(t_0) \neq 0$. Dans ce cas, l'arc paramétré (I,γ) admet pour tangente au point $\mathrm{M}_{t_0} = \gamma(t_0)$ de paramètre t_0 la droite passant par M_{t_0} et dirigée par $\gamma^{(p)}(t_0)$.

REMARQUES

- Implicitement, la proposition suppose que γ est de classe $\mathscr{C}^p$.
- Ainsi, en un point quelconque de l'arc (I,γ), la tangente est dirigée par le premier vecteur $(\gamma^{(p)}(t_0))_{p\geqslant 1}$ non nul. Les affirmations de la méthode précédente sont alors toujours valables en remplaçant $\gamma'(t_0)$ par $\gamma^{(p)}(t_0)$.

Dans la suite, nous travaillons sur des *arcs plans*, c'est-à-dire des arcs paramétrés (I,γ) où $\gamma : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^2$.

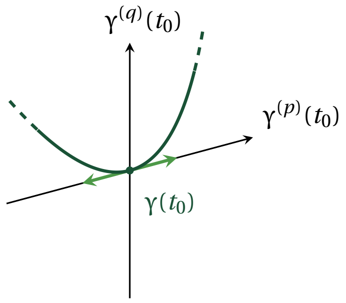
DÉFINITION 7 – *Allure locale d'un arc plan*

Soient (I,γ) un arc plan et $t_0 \in \mathrm{I}$.
S'ils existent, on note $p < q$ les plus petits entiers non nuls tels que $(\gamma^{(p)}(t_0), \gamma^{(q)}(t_0))$ soit libre et constitue donc une base de $\mathbb{R}^2$. On note $\mathrm{M}_{t_0} = \gamma(t_0)$. Les hypothèses permettent d'écrire un développement limité de γ au voisinage de t_0 à l'ordre q sous la forme :

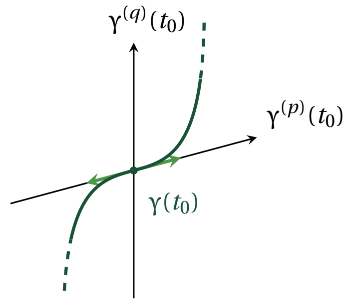
$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!}\gamma^{(p)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^q}{q!}\gamma^{(q)}(t_0) + o((t-t_0)^q)$$

On a alors les allures locales possibles suivantes au voisinage du point M_{t_0} de l'arc paramétré (I,γ) :

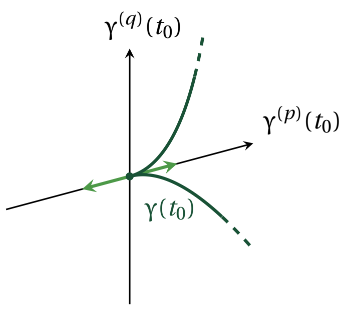
- Si p est impair et q est pair, le point M_{t_0} est un *point ordinaire*;
- Si p est impair et q est impair, le point M_{t_0} est un *point d'inflexion*;
- Si p est pair et q est impair, le point M_{t_0} est un *point de rebroussement de première espèce*;
- Si p est pair et q est pair, le point M_{t_0} est un *point de rebroussement de seconde espèce*.



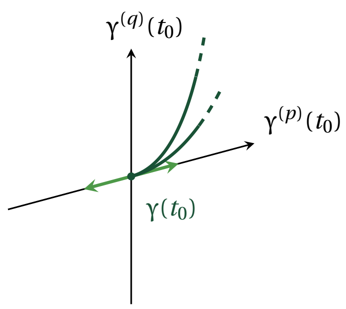
p impair, q pair : *point ordinaire*



p impair, q impair : *point d'inflexion*



p pair, q impair : *point de rebroussement de première espèce*



p pair, q impair : *point de rebroussement de seconde espèce*

✎ Exemples 4

Donner l'allure locale de la courbe plane $(\mathbb{R}, \gamma)$ au voisinage du point $M_0 = \gamma(0)$ dans les deux cas suivants :

(1) $\gamma : t \in \mathbb{R} \longmapsto (t - \sin t, 1 - \cos t) \in \mathbb{R}^2$,

(2) $\gamma : t \in \mathbb{R} \longmapsto (-t^3 + t^4, t^3) \in \mathbb{R}^2$

III. 3. Étude des branches infinies

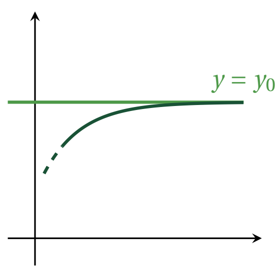
Dans cette sous-partie, nous travaillons toujours sur des *arcs plans*, c'est-à-dire des arcs paramétrés (I, γ) où $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$. On notera également, pour $t \in I$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, c'est-à-dire que x et y sont les fonctions coordonnées de γ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Définition 8 – *Branche infinie*

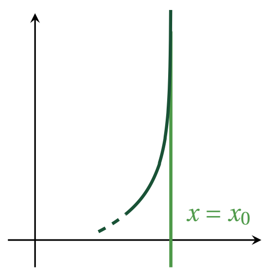
Soient (I, γ) un arc plan et $t_0 \in \overline{I}$.
On dit que l'arc plan (I, γ) présente une branche infinie en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} \|\gamma(t)\| = +\infty$.

Les différents types de branches infinies sont les suivants :

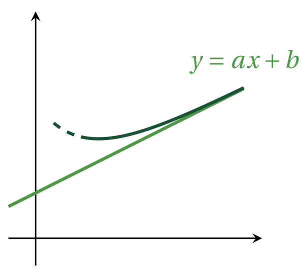
- Si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$, la courbe plane possède une *asymptote verticale d'équation* $x = x_0$.
- Si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$, la courbe plane possède une *asymptote horizontale d'équation* $y = y_0$.
- Si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$:
  - Si $\lim\limits_{t \to t_0} y(t)/x(t) = 0$, la courbe plane possède une *branche parabolique de direction* (Ox).
  - Si $\lim\limits_{t \to t_0} y(t)/x(t) = \pm\infty$, la courbe plane possède une *branche parabolique de direction* (Oy).
  - Si $\lim\limits_{t \to t_0} y(t)/x(t) = a \neq 0$:
    - Si $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) - ax(t) = \pm\infty$, la courbe plane possède une *branche parabolique de direction* $y = ax$.
    - Si $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) - ax(t) = b$, la courbe plane possède une *asymptote d'équation* $y = ax + b$.



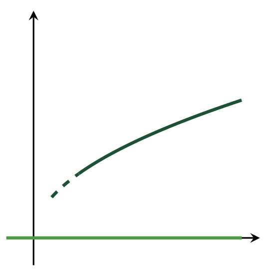
Asymptote horizontale d'équation $y = y_0$



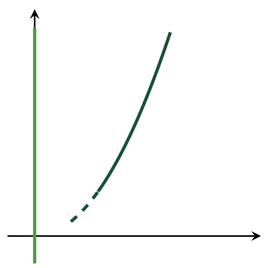
Asymptote verticale d'équation $x = x_0$



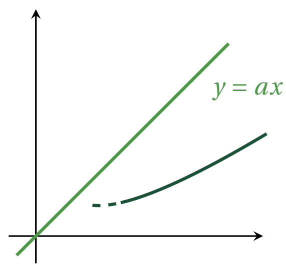
Asymptote oblique d'équation $y = ax + b$



Branche parabolique de direction (Ox)



Branche parabolique de direction (Oy)



Branche parabolique de direction $y = ax$

Exemple 5

Étudier les branches infinies de l'arc paramétré $\gamma : t \in \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\} \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ avec :

$$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}, \quad x(t) = \frac{t}{t^2-1} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{t^2}{t-1}$$

III. 4. Plan d'étude d'une courbe plane

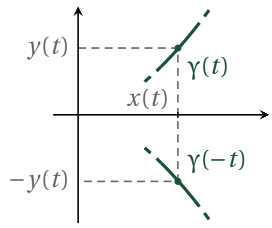
Méthode – *Plan d'étude d'une courbe plane*

Dans cette sous-partie, on détaille le plan d'étude permettant de tracer le support d'un arc plan. On se donne donc (I, γ) où $\gamma : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^2$ et on note, pour $t \in \mathrm{I}$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ où x et y sont les fonctions coordonnées de γ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

(1) Domaine de définition de x et y.
On commence par rechercher les domaines de définition et de dérivabilité des fonctions x et y, on note dans la suite D le domaine trouvé.

(2) Réduction du domaine d'étude.
Par des arguments de symétrie ou de périodicité, on essaie de réduire le domaine d'étude.
Supposons par exemple x paire et y impaire. On a alors la relation :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad \gamma(-t) = (x(-t), y(-t)) = (x(t), -y(t))$$



de sorte que le point $\gamma(-t)$ se déduit du point $\gamma(t)$ par symétrie par rapport à l'axe $(\mathrm{O}x)$. On peut donc se contenter de faire l'étude de l'arc paramétré sur le domaine $\mathrm{D} \cap \mathbb{R}_+$, il suffira en fin d'étude de réaliser la symétrie par rapport à l'axe $(\mathrm{O}x)$ du tracé obtenu pour récupérer le tracé global.
Ainsi, avec le même type d'observations, on a :

- Si x et y sont T−périodiques, on étudie l'arc sur un intervalle de longueur T inclus dans D.
- Si x et y sont impaires, on restreint l'étude à $\mathrm{D} \cap \mathbb{R}_+$ et on fait la symétrie par rapport à l'origine O.
- Si x et y sont paires, on restreint l'étude à $\mathrm{D} \cap \mathbb{R}_+$.
- Si x est paire et y impaire, on restreint l'étude à $\mathrm{D} \cap \mathbb{R}_+$ et on fait la symétrie par rapport à l'axe $(\mathrm{O}x)$.
- Si x est impaire et y paire, on restreint l'étude à $\mathrm{D} \cap \mathbb{R}_+$ et on fait la symétrie par rapport à l'axe $(\mathrm{O}y)$.
- Il est possible de repérer d'autres symétries et d'en tirer le même type de conclusions.

(3) Tableau de variation de x et y
On indique, dans un même tableau, les variations des fonctions x et y en étudiant le signe de x' et y'.

(4) Étude des points singuliers
On étudie l'allure de l'arc plan au voisinage des points singuliers en effectuant un développement limité de l'arc au voisinage de ces points.

(5) Étude des branches infinies
Enfin, on détermine les points de l'arc qui présentent une branche infinie et on étudie ces branches infinies en suivant la méthode de la sous-partie précédente.

Exemple 6 – *Étude de l'astroïde*

Faire l'étude et le tracé de l'arc plan $(\mathbb{R}, \gamma)$ avec $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

III. 5. Longueur d'un arc paramétré

Dans cette sous-partie, on revient à l'étude d'arcs paramétrés (I, γ) avec $\gamma : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$. La norme euclidienne de l'espace $\mathbb{R}^n$ est notée $\|\cdot\|_2$.

DÉFINITION 9 – *Longueur d'un arc paramétré*

Soient (I, γ) un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$ et $t_1 < t_2$ deux éléments de I.
On appelle longueur de l'arc paramétré $([t_1, t_2], \gamma)$ le réel positif :

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(t)\|_2 \, \mathrm{d}t$$

REMARQUES

- Cette définition permet donc de calculer la longueur d'un arc. Attention toutefois lorsque la paramétrisation n'est pas injective et que l'arc est parcouru plusieurs fois.
- Géométriquement, la distance entre les points $\gamma(t)$ et $\gamma(t+\mathrm{d}t)$ est $\|\gamma'(t)\|_2 \, \mathrm{d}t$. En sommant continûment ces distances infinitésimales entre t_1 et t_2, on obtient donc la longueur de l'arc $([t_1, t_2], \gamma)$.
- En termes de cinématique, intégrer la vitesse entre deux instants t_1 et t_2 redonne la distance parcourue sur cet intervalle de temps.

EXEMPLES 7

Calculer les longueurs des deux arcs plans suivants :

(1) $\gamma : t \in [0, 2\pi] \longmapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$

(2) $\gamma : t \in \mathbb{R} \longmapsto (\cos^3 t, \sin^3 t) \in \mathbb{R}^2$