ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Plan du cours

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et $n \geqslant 1$ est un entier naturel non nul. Enfin, on se permettra d'identifier $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$.

I. Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1

Définition 1 – *Équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1*

Une *équation différentielle linéaire du premier ordre* sous forme résolue est une équation de la forme :

$$y' + a(t)y = f(t) \tag{E}$$

où $y : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ est une fonction inconnue que l'on souhaite déterminer et $a : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues sur I.

- Une *solution de* (E) est une fonction $y : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ dérivable sur I vérifiant la relation (E).
- La fonction f est appelée le *second membre* de l'équation différentielle (E). Si la fonction f est nulle, on dit que l'équation différentielle (E) est *homogène*.
- On appelle *équation différentielle homogène associée à* (E) l'équation :

$$y' + a(t)y = 0 \tag{E$_0$}$$

Remarque Le fait que l'équation (E) soit résolue signifie que le coefficient de y' est 1. Si jamais l'équation que l'on souhaite résoudre est non résolue, c'est-à-dire de la forme $by' + a(t)y = f(t)$ avec b une fonction continue, on divise par la fonction b et on résout l'équation différentielle résolue $y' + a/by = f/b$. On prendra garde d'étudier les points où la fonction b s'annule et donc de résoudre cette nouvelle équation différentielle résolue là où c'est possible.

Dans la suite de cette partie, on considère l'équation différentielle $y' + a(t)y = f(t)$ (E) et son équation différentielle homogène associée $y' + a(t)y = 0$ (E_0). On note respectivement $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de (E) et (E_0).

I. 1. Structure des solutions

Proposition 1 – *Structure de l'ensemble des solutions*

- L'ensemble $\mathscr{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$.
- Si y_P est une solution particulière de (E) alors on a :

$$\mathscr{S} = \left\{ y_P + y_0,\ y_0 \in \mathscr{S}_0 \right\}$$

Proposition 2 – *Principe de superposition*

Soient y_1 et y_2 respectivement solutions des équations différentielles :

$$y' + a(t)y' = f_1(t) \qquad \text{et} \qquad y' + a(t)y = f_2(t)$$

Alors la fonction $y_1 + y_2$ est solution de l'équation différentielle :

$$y' + a(t)y = f_1(t) + f_2(t)$$

I. 2. Résolution

Proposition 3 – *Solutions de l'équation homogène*

Les solutions de l'équation homogène (E_0) sont les fonctions de la forme :

$$y : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & Ce^{-A(t)} \end{array}$$

où $C \in \mathbb{K}$ et A est une primitive de a sur I.

Méthode – *Résolution d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1*

On cherche à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' + a(t)y = f(t) \tag{E}$$

On s'appuie sur la connaissance de la structure de l'ensemble des solutions donnée par la **Proposition 1** :

(1) On résout l'équation homogène associée $y' + a(t)y = 0$ (E_0) pour obtenir $\mathscr{S}_0$ grâce à la **Proposition 2** ;

(2) On détermine une solution particulière y_P de (E) :

- On commence par chercher une solution évidente ;
- Lorsque cela n'aboutit pas, on passe à la méthode systématique de la *variation de la constante*. Les solutions de l'équation homogène étant de la forme $t \in I \mapsto Ce^{-A(t)}$ où C est une constante, on fait *varier la constante* en cherchant une solution particulière y_P de la forme :

$$\forall t \in I, \quad y_P(t) = C(t)e^{-A(t)}$$

où $C : I \to \mathbb{K}$ est une *fonction* à déterminer. On trouve l'expression de C en exprimant le fait que y_P doit être solution de (E).

Remarque Dans le cas où le second membre s'exprime sous la forme d'une somme, on peut tirer profit du principe de superposition.

(3) On conclut en écrivant que $\mathscr{S} = \left\{ y_P + y_0,\ y_0 \in \mathscr{S}_0 \right\}$.

Exemple 1

Résoudre l'équation différentielle résolue suivante sur $I = \mathbb{R}$ et avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$$y' - ty = te^{t^2} \tag{E}$$

I. 3. Problème de Cauchy

Proposition 4 – *Résolution du problème de Cauchy*

Pour toute condition initiale $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, le problème de Cauchy (P) suivant :

$$(\text{P}) \quad \begin{cases} y' + a(t)y = f(t) & (\text{E}) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

Exemple 2

Résoudre le problème de Cauchy suivant sur $I = \mathbb{R}$ et avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$$(\text{P}) \quad \begin{cases} y' - ty = te^{t^2} & (\text{E}) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

II. Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1

Définition 2 – *Système différentiel linéaire d'ordre 1*

Un *système différentiel linéaire du premier ordre* est une équation de la forme :

$$X' = A(t)X + B(t) \tag{S}$$

où $X : I \to \mathbb{K}^n$ est une fonction inconnue que l'on souhaite déterminer et $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathbb{K}^n$ deux fonctions continues sur I.

- Une *solution de* (S) est une fonction $X : I \to \mathbb{K}^n$ dérivable sur I vérifiant la relation (S).
- La fonction B est appelée le *second membre* du système différentiel (S). Si la fonction B est nulle, on dit que le système différentiel (S) est *homogène*.
- On appelle *système différentiel homogène associé à* (S) l'équation :

$$X' = A(t)X \tag{S_0}$$

Remarques

- La continuité des fonctions A et B est dans le contexte du chapitre des espaces vectoriels normés.
- La dérivabilité de la fonction X est à comprendre dans le contexte du chapitre des fonctions vectorielles.

Dans la suite de cette partie, on considère le système différentiel $X' = A(t)X + B(t)$ (S) et son système différentiel homogène associé $X' = A(t)X$ (S_0). On note respectivement $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de (S) et (S_0).

En notant $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ les fonctions coordonnées des fonctions X et B dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ ainsi que $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ les fonctions coordonnées de la fonction A dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le système (S) s'écrit :

$$(\text{S}) \quad \begin{cases} x_1' = a_{1,1}(t)x_1 + \cdots + a_{1,n}(t)x_n + b_1(t) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_n' = a_{n,1}(t)x_1 + \cdots + a_{n,n}(t)x_n + b_n(t) \end{cases}$$

Remarque Si $n = 1$, le système différentiel (S) devient $x_1' = a_{1,1}(t)x_1 + b_1(t)$, ce qui est le cadre de la partie **I**.

II. 1. Structure des solutions

Proposition 5 – *Structure de l'ensemble des solutions*

- L'ensemble $\mathscr{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K}^n)$.
- Si $\mathrm{X_P}$ est une solution particulière de (S) alors on a :

$$\mathscr{S} = \{\mathrm{X_P} + \mathrm{X}_0, \mathrm{X}_0 \in \mathscr{S}_0\}$$

Proposition 6 – *Principe de superposition*

Soient X_1 et X_2 respectivement solutions des systèmes différentiels :

$$\mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X} + \mathrm{B}_1(t) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{X}' + \mathrm{A}(t)\mathrm{X} = \mathrm{B}_2(t)$$

Alors la fonction $\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2$ est solution de l'équation différentielle :

$$\mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X} + \mathrm{B}_1(t) + \mathrm{B}_2(t)$$

II. 2. Problème de Cauchy

De la même façon que pour les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1, on peut définir la notion de problème de Cauchy pour les systèmes différentiels linéaires d'ordre 1. Le théorème qui suit est fondamental, sa démonstration est admise.

Théorème 1 – *Théorème de Cauchy linéaire*

Pour toute condition initiale $(t_0, \mathrm{X}_0) \in \mathrm{I} \times \mathbb{K}^n$, le problème de Cauchy (P) suivant :

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} \mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X} + \mathrm{B}(t) \quad (\mathrm{S}) \\ \mathrm{X}(t_0) = \mathrm{X}_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

Le théorème de Cauchy linéaire permet de décrire plus précisément l'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions du système différentiel homogène (S_0) en spécifiant sa dimension.

Théorème 2 – *Dimension de $\mathscr{S}_0$*

Pour $t_0 \in \mathrm{I}$, l'application suivante :

$$\varphi_{t_0} : \begin{array}{ccc} \mathscr{S}_0 & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ \mathrm{X} & \longmapsto & \mathrm{X}(t_0) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier, $\dim(\mathscr{S}_0) = n$.

Remarque Le fait de connaître la dimension de $\mathscr{S}_0$ se révèle utile lors de la résolution. En effet, si l'on trouve une famille de n solutions $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ de (S_0), il suffit, pour montrer que cette famille est une base de $\mathscr{S}_0$, de justifier qu'elle est libre.

II. 3. Résolution approchée : méthode d'Euler

Contrairement au cas $n = 1$, on ne sait pas expliciter de façon générale les solutions d'un système différentiel linéaire du premier ordre dès que $n \geqslant 2$. On peut, à défaut, calculer numériquement des solutions approchées.

On travaille dans la suite sur le système différentiel $X' = A(t)X + B(t)$ (S) et nous utilisons la *méthode d'Euler* pour calculer numériquement une solution approchée de (S). Il est à noter qu'il existe de nombreuses autres méthodes pour calculer numériquement une solution approchée d'un tel système différentiel.

La méthode d'Euler repose sur l'approximation à l'ordre 1 suivante :

$$\forall t \in \mathring{I}, \quad X(t+h) \approx X(t) + hX'(t)$$

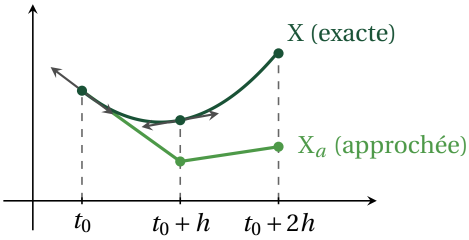
valable pour h « petit ». En effet, X étant dérivable sur l'intervalle I, on a, pour $t \in \mathring{I}$ fixé :

$$\lim_{h\to 0} \frac{X(t+h)-X(t)}{h} = X'(t)$$

de sorte que, lorsque h est « petit », on obtient :

$$\frac{X(t+h)-X(t)}{h} \approx X'(t) \quad \Longleftrightarrow \quad X(t+h) \approx X(t) + hX'(t)$$

Cette approximation est d'autant meilleure que h, le *pas*, est petit.



- $X_a(t_0) = X(t_0) = X_0$
- $X_a(t_0+h) = X_a(t_0) + hX'(t_0)$
- $X_a(t_0+2h) = X_a(t_0+h) + hX'(t_0+h)$

Si X est solution de (S), on obtient donc :

$$X(t+h) \approx X(t) + h[A(t)X(t) + B(t)]$$

On suppose que $I = [a, b]$ et on subdivise le segment I en N sous-segments de même taille en posant :

$$\forall k \in [\![0, N]\!], \quad t_k = a + kh \qquad \text{où} \qquad h = \frac{b-a}{N}$$

Avec une condition initiale $X(t_0) = X_0 \in \mathbb{K}^n$ donnée, on construit alors une solution approchée affine par morceaux X_a en définissant pas à pas ses valeurs sur la subdivision $(t_k)_{0\leqslant k\leqslant N}$ de la façon suivante :

$$X_a(t_0) = X_0 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![0, N-1]\!], \quad X_a(t_{k+1}) = X_a(t_k) + h[A(t_k)X_a(t_k) + B(t_k)]$$

À nouveau, plus h est petit, c'est-à-dire plus N est grand, plus la solution X_a approche correctement X.

Exemple 3

> Proposer un programme `Pyhton` permettant de calculer une solution approchée du système différentiel :
>
> $$\begin{cases} x_1' = 4x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 3x_1 - x_2 \end{cases} \qquad \text{(S)}$$
>
> On travaillera sur l'intervalle $[0, 1]$ avec les conditions initiales $x_1(0) = 2$ et $x_2(0) = 3$.

II. 4. Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

Le système différentiel linéaire $X' = A(t)X + B(t)$ (S) est dit *à coefficients constants* si la fonction $A : t \in I \longmapsto A(t) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est constante. On identifie alors A à une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et on note le système différentiel sous la forme :

$$X' = AX + B(t) \qquad \text{(S)}$$

Dans ce cas, sous certaines hypothèses sur la matrice A, on est cette fois-ci capable d'expliciter les solutions de (S).

Dans la suite, on illustre les méthodes associées sur des systèmes différentiels linéaires homogènes mais elles peuvent également être utilisées lorsqu'un second membre est présent.

Méthode – *Résolution lorsque la matrice* A *est diagonalisable*

> On souhaite résoudre le système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène à coefficients constants :
>
> $$X' = AX \qquad \text{(S)}$$
>
> avec $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que :
>
> $$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = D$$
>
> **(1)** On réalise le changement d'inconnue $X = PY$, ou de façon équivalente $Y = P^{-1}X$. On remarque que X est dérivable si et seulement si Y l'est puisque l'on a composé par une application linéaire et que $X' = PY'$.

(2) On observe que : $X' = AX \iff PY' = APY \iff Y' = P^{-1}APY \iff Y' = DY$

(3) On résout alors le système différentiel diagonal $Y' = DY$ en le résolvant ligne par ligne. Plus précisément, en notant $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les fonctions coordonnées de Y dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, l'identité $Y' = DY$ donne :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad y_i' = \lambda_i y_i$$

d'où l'on déduit immédiatement que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \exists C_i \in \mathbb{K}, \quad \forall t \in I, \quad y_i(t) = C_i e^{\lambda_i t}$$

(4) On conclut en calculant $X = PY$. Les constantes $(C_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ peuvent être déterminées si une condition initiale est donnée.

Remarque Lorsque le système différentiel n'est pas homogène et s'écrit $X' = AX + B(t)$ (S) on procède de la même façon excepté qu'à l'étape **(2)**, on a :

$$X' = AX + B(t) \iff PY' = APY + B(t) \iff Y' = P^{-1}APY + P^{-1}B(t) \iff Y' = DY + P^{-1}B(t)$$

et qu'à l'étape **(3)** on résout les équations différentielles suivantes :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad y_i' = \lambda_i y_i + (P^{-1}B(t))_i$$

qui ont cette fois un second membre.

Exemple 4

Résoudre le système différentiel $X' = AX$ sur $I = \mathbb{R}$ avec $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Méthode – *Résolution lorsque la matrice A est trigonalisable*

Le problème étant le même, la méthode précédente peut s'adapter dans le cas où la matrice A est trigonalisable. Dans ce cas, il existe cette fois $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que :

$$P^{-1}AP = T$$

(1) On réalise le changement d'inconnue $X = PY$.

(2) On remarque que : $X' = AX \iff Y' = TY$.

(3) On résout le système différentiel triangulaire $Y' = TY$ en le résolvant ligne par ligne, du bas vers le haut.

(4) On conclut en calculant $X = PY$.

Remarques

- Lorsque l'on trigonalise la matrice A, on cherchera à obtenir la matrice triangulaire T la plus simple possible afin que le système différentiel $Y' = TY$ soit le plus simple possible.
- Comme exposé dans la méthode précédente, il est tout à fait possible de traiter le cas où le système différentiel n'est pas homogène et s'écrit $X' = AX + B(t)$ (S).

Exemple 5

Résoudre le système différentiel $X' = AX$ sur $I = \mathbb{R}$ avec $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

III. Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

Définition 3 – *Équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2*

Une *équation différentielle linéaire du second ordre* sous forme résolue est une équation de la forme :

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t) \qquad \text{(E)}$$

où $y : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ est une fonction inconnue que l'on souhaite déterminer et $a : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$, $b : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ trois fonctions continues sur I.

- Une *solution de* (E) est une fonction $y : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable sur I vérifiant la relation (E).
- La fonction f est appelée le *second membre* de l'équation différentielle (E). Si la fonction f est nulle, on dit que l'équation différentielle (E) est *homogène*.
- On appelle *équation différentielle homogène associée à* (E) l'équation :

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \qquad (\mathrm{E}_0)$$

Remarque Le fait que l'équation (E) soit résolue signifie que le coefficient de y'' est 1. Si jamais l'équation que l'on souhaite résoudre est non résolue, on se ramène par division à une équation résolue.

Dans la suite de cette partie, on considère l'équation différentielle $y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t)$ (E) et son équation différentielle homogène associée $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ (E_0). On note respectivement $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de (E) et (E_0).

III. 1. Traduction en un système différentiel linéaire d'ordre 1

On définit deux applications $\mathrm{A} : \mathrm{I} \to \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} : \mathrm{I} \to \mathbb{K}^2$ en posant :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

et on considère le système différentiel linéaire d'ordre 1 :

$$\mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X} + \mathrm{B}(t) \qquad \text{(S)}$$

Avec ces définitions, on montre que l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre deux (E) et le système différentiel linéaire d'ordre un (S) sont, à un changement d'écriture près, parfaitement équivalents. Plus précisément :

Proposition 7 – *Transformation en un système différentiel*

- Si $y : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ est solution de (E), alors l'application $\mathrm{X} : t \in \mathrm{I} \mapsto \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$ est solution de (S).
- Si $\mathrm{X} : \mathrm{I} \to \mathbb{K}^2$ est solution de (S), alors elle s'écrit $\mathrm{X} : t \in \mathrm{I} \mapsto \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$ avec $y : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ solution de (E).

De plus, si $t_0 \in \mathbb{K}$ et $\mathrm{X}_0 = {}^t(v_0, v_1) \in \mathbb{K}^2$, la donnée d'une condition initiale $\mathrm{X}(t_0) = \mathrm{X}_0$ équivaut à la donnée des conditions initiales $y(t_0) = v_0$ et $y'(t_0) = v_1$.

Grâce à cette traduction, tous les résultats obtenus dans la partie précédente concernant les systèmes différentiels linéaires d'ordre un peuvent s'appliquer et nous donner des résultats concernant les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre deux.

III. 2. Structure des solutions et problème de Cauchy

Proposition 8 – *Structure de l'ensemble des solutions*

- L'ensemble $\mathscr{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^2(\mathrm{I}, \mathbb{K})$.
- Si y_{P} est une solution particulière de (E) alors on a :

$$\mathscr{S} = \{y_{\mathrm{P}} + y_0,\ y_0 \in \mathscr{S}_0\}$$

Méthode – *Résolution d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2*

La méthode de résolution d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre deux reste la même :

(1) On résout l'équation homogène associée (E_0) pour déterminer $\mathscr{S}_0$;

(2) On détermine une solution particulière y_{P} de (E) ;

(3) On conclut en écrivant que $\mathscr{S} = \{y_{\mathrm{P}} + y_0,\ y_0 \in \mathscr{S}_0\}$.

Proposition 9 – *Principe de superposition*

Soient y_1 et y_2 respectivement solutions des équations différentielles :

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = f_1(t) \qquad \text{et} \qquad y'' + a(t)y' + b(t)y = f_2(t)$$

Alors la fonction $y_1 + y_2$ est solution de l'équation différentielle :

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = f_1(t) + f_2(t)$$

Théorème 3 – *Théorème de Cauchy linéaire*

Pour toute condition initiale $(t_0, v_0, v_1) \in \mathrm{I} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, le problème de Cauchy (P) suivant :

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t) & (\mathrm{E}) \\ y(t_0) = v_0 \\ y'(t_0) = v_1 \end{cases}$$

admet une unique solution.

Théorème 4 – *Dimension de $\mathscr{S}_0$*

Pour $t_0 \in \mathrm{I}$, l'application suivante :

$$\varphi_{t_0} : \begin{array}{ccc} \mathscr{S}_0 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ y & \longmapsto & (y(t_0), y'(t_0)) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier, $\dim(\mathscr{S}_0) = 2$.

Remarque La connaissance de la dimension de $\mathscr{S}_0$ peut se révéler très utile d'un point de vue pratique : pour décrire $\mathscr{S}_0$, il suffit de trouver deux fonctions f_1 et f_2 de $\mathscr{S}_0$ non colinéaires pour affirmer que (f_1, f_2) forme une base de $\mathscr{S}_0$. Effet, cette famille est alors libre et de cardinal $2 = \dim(\mathscr{S}_0)$.

Exemple 6

Résoudre l'équation différentielle homogène suivante sur $\mathrm{I} =]0, +\infty[$ et avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$$t^2y'' + ty' - y = 0 \qquad (\mathrm{E})$$

On cherchera des fonctions solutions de la forme $t \mapsto t^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Méthode – *Détermination d'une solution développable en série entière*

On considère une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre deux (E) dont on cherche une solution. Une idée peut être de chercher des solutions de (E) développables en série entière. Pour ce faire, on procède par analyse-synthèse.

(1) Pour l'analyse, on suppose que y est une solution de (E) développable en série entière avec un rayon de convergence $R > 0$. On pose par exemple :

$$\forall t \in]-R, R[, \quad y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

Le cours assure que la somme y de cette série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert $]-R, R[$ de convergence et que les dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme :

$$\forall t \in]-R, R[, \quad y'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} t^n$$

$$y''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n$$

On reporte ces expressions de y, y' et y'' dans l'équation différentielle (E) et on détermine, grâce à l'unicité du développement en série entière, une relation entre les coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$; on trouve alors l'expression de ces derniers.

(2) Réciproquement, on fait la synthèse, on définit une fonction somme d'une série entière grâce à l'expression des coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trouvée dans l'analyse. On vérifie que le rayon de convergence de cette série entière est strictement positif et que la fonction somme est bien solution de l'équation différentielle (E).

Remarques

- Cette méthode peut s'appliquer sur une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 non résolue.
- Elle est particulièrement adaptée lorsque les coefficients de y'', y' et y sont polynomiaux.

Exemple 7

Trouver les solutions développables en série entière de l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 :

$$t y'' + 2y' + t y = 0 \tag{E}$$

III. 3. Équations à coefficients constants

Dans cette sous-partie, on suppose que les fonctions $a : I \to \mathbb{K}$ et $b : I \to \mathbb{K}$ sont constantes. On les identifie alors à deux constantes a et b dans $\mathbb{K}$. On étudie donc l'équation différentielle $y'' + ay' + by = f(t)$ (E) et son équation différentielle homogène associée $y'' + ay' + by = 0$ (E_0). On note toujours respectivement $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de (E) et (E_0).

Remarque – *Équation caractéristique*

Le système différentiel linéaire d'ordre 1 associé à (E) est dans ce cas à coefficients constants avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

On peut facilement vérifier que le polynôme caractéristique χ_A de A est $\chi_A(X) = X^2 + aX + b$ qui n'est autre que l'*équation caractéristique* classiquement associée à l'équation (E_0). Les racines de l'équation caractéristique permettent de donner une expression des solutions de l'équation homogène (E_0). Ceci est lié au fait que ce sont aussi les valeurs propres de la matrice A du système différentiel linéaire d'ordre 1 associé.

Le résultat suivant rappelle comment résoudre une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants.

PROPOSITION 10 – *Solutions de l'équation homogène*

On note (R) l'équation caractéristique associée à (E_0).

On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

- Si (R) a deux solutions distinctes λ_1 et λ_2 alors toute solution y de (E_0) s'écrit :

$$\forall t \in I, \quad y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$$

- Si (R) a une solution double λ alors toute solution y de (E_0) s'écrit :

$$\forall t \in I, \quad y(t) = e^{\lambda t}(C_1 + C_2 t), \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$$

On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

- Si (R) a deux solutions réelles distinctes λ_1 et λ_2 alors toute solution y de (E_0) s'écrit :

$$\forall t \in I, \quad y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

- Si (R) a une solution réelle double λ alors toute solution y de (E_0) s'écrit :

$$\forall t \in I, \quad y(t) = e^{\lambda t}(C_1 + C_2 t), \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

- Si (R) a deux solutions complexes et conjuguées $\alpha \pm i\beta$ alors toute solution y de (E_0) s'écrit :

$$\forall t \in I, \quad y(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)), \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

PROPOSITION 11 – *Recherche d'une solution particulière*

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $K \in \mathbb{K}$. On suppose que (E) s'écrit :

$$y'' + ay' + by = Ke^{\lambda t}$$

Alors (E) possède une solution particulière de la forme :

- $t \mapsto Ce^{\lambda t}$ avec $C \in \mathbb{K}$ si λ n'est pas solution de l'équation caractéristique.
- $t \mapsto Cte^{\lambda t}$ avec $C \in \mathbb{K}$ si λ est racine simple de l'équation caractéristique.
- $t \mapsto Ct^2 e^{\lambda t}$ avec $C \in \mathbb{K}$ si λ est racine double de l'équation caractéristique.

REMARQUES

- Grâce aux formules d'Euler et par principe de superposition, on sait donc trouver une solution particulière lorsque le second membre est de la forme $t \mapsto A\cos(\omega t)$ ou $t \mapsto A\sin(\omega t)$.
- Lorsque le second membre est constant, on cherche une solution particulière constante. Lorsqu'il est polynomial, on cherche une solution particulière polynomiale dont on cherchera par avance le degré.

EXEMPLE 8

Résoudre l'équation différentielle suivante sur $I = \mathbb{R}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} = \mathbb{C}$.

$$y'' - 2y' + 2y = t^2 + 4 \tag{E}$$