DEVOIR À LA MAISON n°8

Pour le lundi 15 février

Exercice 1

Dans cet exercice, E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients réels et $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ sa base canonique. Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E, on pose :

$$(P \mid Q) = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1)$$

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.
3. Déterminer la distance du polynôme $U = X^2 - 4$ à $\mathbb{R}_1[X]$.
4. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $P(1) = 0$.

   4.1. Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E. Quelle est sa dimension ?

   4.2. Soit φ la projection orthogonale sur H. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 2

Soient E un plan vectoriel, $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E et $\theta \in]0, \pi[$ fixé. Dans la suite, on considère l'endomorphisme f de E représenté par sa matrice C dans la base $\mathscr{B}$ avec :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

On définit alors sur E une forme bilinéaire symétrique Φ par les relations :

$$\Phi(\vec{i}, \vec{j}) = \Phi(\vec{j}, \vec{i}) = \cos(\theta) \qquad \text{et} \qquad \Phi(\vec{i}, \vec{i}) = \Phi(\vec{j}, \vec{j}) = 1.$$

On rappelle qu'une forme bilinéaire sur E est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$, linéaire par rapport à chacune des variables et que le fait qu'elle soit symétrique signifie que $\Phi(x, y) = \Phi(y, x)$ pour tout $(x, y) \in E^2$.

1. Soient $X = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$ et $Y = y_1\vec{i} + y_2\vec{j}$ deux vecteurs de E.
   Exprimer $\Phi(X, Y)$ en fonction des réels x_1, x_2, y_1, y_2 et θ.
2. Montrer que Φ est un produit scalaire sur E.
3. Prouver que f est une isométrie pour le produit scalaire Φ.
4. Déterminer un vecteur $\vec{k} \in E$ tel que $(\vec{i}, \vec{k})$ soit une base orthonormée pour Φ et que $\Phi(\vec{j}, \vec{k}) > 0$.
5. Expliciter la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{k})$. Préciser la nature de f.
6. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour quelles valeurs de $\theta \in]0, \pi[$ a-t-on $f^m = \mathrm{id}_E$?

Problème

Dans la suite, pour $n \geqslant 1$, on note $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on définit les noyau et image de A en posant :

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ AX = 0\right\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(A) = \left\{Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \exists X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ Y = AX\right\}$$

L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique noté $(\cdot \mid \cdot)$ et de la norme associée notée $\|\cdot\|$. Dans la suite, on se permettra d'identifier $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$.

1. Soit M la matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ donnée par :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1.1. Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{M})$ et $\mathrm{Ker}\left({}^t\mathrm{M}\right)$.
Existe-t-il une relation d'inclusion entre les noyaux $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{M})$ et $\mathrm{Ker}\left({}^t\mathrm{M}\right)$?

1.2. Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}\,(\mathrm{M})$ et $\mathrm{Im}\left({}^t\mathrm{M}\right)$.
Existe-t-il une relation d'inclusion entre les images $\mathrm{Im}\,(\mathrm{M})$ et $\mathrm{Im}\left({}^t\mathrm{M}\right)$?

2. Dans cette question, on fixe $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

2.1. Montrer que $\mathrm{Ker}\left({}^t\mathrm{A}\mathrm{A}\right) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A})$ et $\mathrm{Ker}\left(\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A}\right) = \mathrm{Ker}\,({}^t\mathrm{A})$.

2.2. Montrer que $\mathrm{rg}\left({}^t\mathrm{A}\mathrm{A}\right) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A}\right) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{A})$.

2.3. Montrer que $\mathrm{Im}\left({}^t\mathrm{A}\mathrm{A}\right) = \mathrm{Im}\,({}^t\mathrm{A})$ et $\mathrm{Im}\left(\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A}\right) = \mathrm{Im}\,(\mathrm{A})$.

Dans la suite, on considère q un entier naturel non nul et $\mathscr{S} = (x_1, x_2, \ldots, x_q)$ une famille de q vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
On note F le sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{S}$, $r = \dim \mathrm{F}$ et $\mathrm{G} = (g_{i,j})$ la matrice de $\mathscr{M}_q(\mathbb{R})$ définie par la relation $g_{i,j} = (x_i \,|\, x_j)$ pour tout $(i,j) \in [\![1,q]\!]^2$. Le déterminant de G est appelé déterminant de Gram du système $\mathscr{S}$ et sera noté $\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_q)$.

3. Dans cette question, on se donne $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ une base orthonormale de F et on note :

$$\forall j \in [\![1,q]\!], \quad x_j = \sum_{i=1}^{r} b_{i,j} e_i$$

les décompositions des vecteurs $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$. On introduit la matrice $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{r,q}(\mathbb{R})$ dont le terme général est $b_{i,j}$.

3.1. Montrer que $\mathrm{G} = {}^t\mathrm{B}\mathrm{B}$ et en déduire $\mathrm{rg}\,(\mathrm{G}) = \mathrm{rg}\,(\mathscr{S})$.

3.2. Montrer que G est diagonalisable et que ses valeurs propres sont toutes positives.

3.3. En déduire que l'on a $\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_q) \geqslant 0$.
Prouver de plus que $\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_q) = 0$ si et seulement si la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ est liée.

3.4. Montrer que l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec sa condition nécessaire et suffisante d'égalité est un cas particulier de ce résultat.

4. Montrer que le déterminant $\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ reste invariant si l'on ajoute à l'un des vecteurs x_i une combinaison linéaire des autres.

5. Dans cette question q est supérieur ou égal à 2.

5.1. On note L le sous-espace vectoriel engendré par $(x_2, x_3, \ldots, x_q)$ et $p_{\mathrm{L}}(x_1)$ la projection orthogonale de x_1 sur L. Enfin, on pose $h_1 = x_1 - p_{\mathrm{L}}(x_1)$. Montrer que :

$$\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_q) = \|h_1\|^2 \,\gamma(x_2, \ldots, x_q)$$

5.2. En déduire successivement :

(1) $\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_q) \leqslant \gamma(x_1)\gamma(x_2, x_3, \ldots, x_q)$ avec égalité si et seulement si x_1 est orthogonal à L.

(2) $\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_q) \leqslant \gamma(x_1)\gamma(x_2)\ldots\gamma(x_q)$ avec égalité si et seulement si les vecteurs x_1, x_2, …, x_q sont deux à deux orthogonaux.

6. Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et c_1, c_2, …, c_n ses vecteurs colonnes. Montrer que :

$$|\det \mathrm{A}| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|c_k\|$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs c_1, …, c_n sont deux à deux orthogonaux.