ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

T.D. n°11

Exercice 1 ●○○ Isométrie du plan

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne orientée canonique, on considère u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice :

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Reconnaître et donner les éléments caractéristiques de l'endomorphisme u du plan $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 ●○○ Isométries de l'espace

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne orientée canonique, on considère respectivement u, v et w les endomorphismes canoniquement associés aux matrices :

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Reconnaître et donner les éléments caractéristiques des endomorphismes u, v et w de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 ●○○ Matrices d'isométries de l'espace

Dans chacun des cas suivants, donner la matrice de l'endomorphisme u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, ce dernier étant muni de sa structure euclidienne orientée canonique.

1. u est la rotation d'angle $2\pi/3$ et d'axe dirigé par $(1,1,1)$.
2. u est la symétrie orthogonale par rapport à la droite dirigée par $(1,2,2)$.

Exercice 4 ●○○ Diagonalisation dans une base orthonormée

Pour la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante, déterminer $P \in O_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 ●○○ Somme des valeurs propres au carré

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres. Établir que :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

Exercice 6 ●●○ Un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$

On se place dans $\mathbb{R}_n[X]$ que l'on munit du produit scalaire suivant :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \quad (P\,|\,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$$

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\varphi(P) = (X^2-1)P'' + 2XP' + P$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Prouver que φ est symétrique.

Exercice 7 ●●○ — *Quelques propriétés classiques*

1. On se donne $S \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle et nilpotente.
   Prouver que $S = 0$.
2. On se donne $P \in O_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale réelle.
   Prouver que P est diagonalisable si et seulement si $P^2 = I_n$.

Exercice 8 ●●○ — *Matrices symétriques positives*

On note $S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $S_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété :

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXSX \geqslant 0 \quad (\text{resp. } {}^tXSX > 0)$$

Ces matrices sont dites symétriques *positives* (resp. *définies positives*).

1. On se donne $S \in S_n(\mathbb{R})$ et on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de S comptées avec leur ordre de multiplicité.
   - **a.** Prouver que $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $\lambda_i \geqslant 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
   - **b.** Énoncer et prouver une caractérisation similaire pour les matrices de $S_n^{++}(\mathbb{R})$.
   - **c.** Si $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer que S est inversible et que $S^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. On se donne $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ et on note toujours $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de S.
   - **a.** Prouver qu'il existe une matrice $R \in S_n^+(\mathbb{R})$ vérifiant $R^2 = S$.
     On pourra tenter de diagonaliser S.
   - **b.** On se donne $T \in S_n^+(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $T^2 = S$. Montrer que :
     $$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \operatorname{Ker}(T - \sqrt{\lambda_i} I_n) = \operatorname{Ker}(S - \lambda_i I_n)$$
   - **c.** En déduire qu'il existe une et une seule matrice $R \in S_n^+(\mathbb{R})$ vérifiant $R^2 = S$.
3. Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $S = {}^tAA$.
   - **a.** Justifier que $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.
   - **b.** Prouver que $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 9 ●●○ — *Un endomorphisme orthogonal sur les matrices*

On fixe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on introduit l'application f_A suivante :

$$f_A : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f_A soit un endomorphisme orthogonal de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.

Exercice 10 ●●○ — *Un endomorphisme symétrique*

On considère E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, a un vecteur unitaire de E et $k \in \mathbb{R}$ un réel. On définit une application f_k sur E en posant :

$$\forall x \in E, \quad f_k(x) = x + k\,(x \mid a)\,a$$

1. Montrer que f_k est un endomorphisme symétrique de E.
2. Déterminer $k \in \mathbb{R}$ pour que f_k soit un endomorphisme orthogonal de E. Déterminer alors la nature de f_k.
3. Étudier les éléments propres de f_k.

Exercice 11 ●●○ — *Produit vectoriel*

Soit a un vecteur non nul d'un espace euclidien orienté E de dimension 3. On définit une application f en posant :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad f(x) = a \wedge x$$

1. Justifier que f est un endomorphisme de E et en déterminer l'image et le noyau.
2. Déterminer les éléments propres de f.

Exercice 12 ●●● — *Matrices de Hilbert*

On note $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété :

$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^t\mathrm{XSX} > 0$$

On note H la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont le terme général est donné par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \mathrm{H}_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$$

Prouver que $\mathrm{H} \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 13 ●●● — *Décomposition polaire dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$*

On note $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété :

$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^t\mathrm{XSX} > 0$$

On se donne $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Justifier qu'il existe une matrice $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ orthogonale et une matrice $\mathrm{S} \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ symétrique définie positive telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PS}$.