FONCTIONS VECTORIELLES

T.D. N°12

EXERCICE 1 ●○○ — *Fonction de norme constante*

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On note $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

1. On suppose que la norme de f est constante sur I.
   Montrer que, pour tout $t \in \mathrm{I}$, $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux.
2. Montrer que la fonction $t \mapsto \|f(t)\|_2$ est dérivable en tout point $t_0 \in \mathrm{I}$ vérifiant $f(t_0) \neq 0$.

EXERCICE 2 ●○○ — *Wronskien*

Soient deux applications a et b continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et on considère l'équation différentielle :

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{E}$$

On se donne y_1 et y_2 deux solutions de (E) et on définit la fonction $\mathrm{W} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ en posant :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{W}(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_1'(t) \\ y_2(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

1. Montrer que W est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
2. En déduire une expression de W.

EXERCICE 3 ●○○ — *Coordonnées polaires*

Soient r et θ des fonctions dérivables sur un intervalle I. On note, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $u(\alpha)$ le vecteur $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ de $\mathbb{R}^2$. On considère alors la fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^2$ définie en coordonnées polaires par :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad f(t) = r(t)u(\theta(t))$$

1. Montrer que f est dérivable sur I et en donner la dérivée.
2. Si l'on suppose de plus que r et θ sont deux fois dérivables, justifier que f est deux fois dérivable sur I et en donner la dérivée seconde.

EXERCICE 4 ●●○ — *Déplacement d'un point matériel dans le plan*

On considère un point matériel en mouvement dans le plan. Sur l'intervalle de temps I, la position de ce point matériel à l'instant $t \in \mathrm{I}$ est donnée par M_t.

1. On suppose qu'à chaque instant le vecteur vitesse du point matériel est orthogonal à la droite (OM_t).
   Montrer que la trajectoire du point matériel est sur un cercle centrée en l'origine O.
2. On suppose cette fois qu'à chaque instant le vecteur vitesse du point matériel est colinéaire à la droite (OM_t).
   Montrer que la trajectoire du point matériel est rectiligne.

EXERCICE 5 ●●○ — *Déplacement d'un point matériel dans l'espace*

On considère un point matériel en mouvement dans l'espace. Sur l'intervalle de temps I, la position de ce point matériel à l'instant $t \in \mathrm{I}$ est donnée par M_t. On suppose qu'à chaque instant le vecteur accélération du point matériel est colinéaire au vecteur $f(t) = \overrightarrow{\mathrm{OM}_t}$.

1. Montrer que la fonction $g : t \mapsto f(t) \wedge f'(t)$ est constante sur I.
2. Si $g \neq 0$ sur I, montrer que la trajectoire du point matériel est plane.

EXERCICE 6 ●○○ — *Développements limités et allure locale d'arcs plans*

Donner un développement limité de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ à l'ordre 5 en 0 pour :

$$f : t \mapsto \left(3(\sin t - t), t^3 + t^5\right) \qquad \text{et} \qquad f : t \mapsto \left(\cos t, \cos^2 t\right)$$

En déduire la nature du point M_0 de paramètre $t = 0$ des arcs plans associés et tracer l'allure des courbes paramétrées au voisinage du point M_0.

EXERCICE 7 ●○○ — *Études d'arcs plans*

Dans chacun des cas suivants, faire l'étude complète de l'arc paramétré (I, γ).

1. $\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \left(\frac{t}{1+t^3}, \frac{t^2}{1+t^3}\right) \end{array}$
   (*Folium de Descartes*)
2. $\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (2\cos t + \cos 2t, 2\sin t + \sin 2t) \end{array}$
   (*Cardioïde*)
3. $\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\sin 2t, \cos 3t) \end{array}$
   (*Courbe de Lissajous*)
4. $\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4}\right) \end{array}$
   (*Lemniscate de Bernoulli*)

EXERCICE 8 ●●○ — *Étude de la cycloïde*

On définit un arc paramétré (I, γ) en posant :

$$\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t - \sin t, 1 - \cos t) \end{array}$$

1. Faire l'étude complète de cet arc paramétré (*Cycloïde*).
2. Un cercle de rayon 1 roule sans glisser sur l'axe (Ox). Au temps $t = 0$, le cercle est en contact avec l'origine O de l'axe (Ox) et on appelle M le point du cercle en contact avec O.
   Déterminer une équation paramétrique de la trajectoire de ce point M au cours du temps.