ESPACES PROBABILISÉS

T.D. n°14

Exercice 1 ●●○ — *Tirages avec remise et ajout*

On lance une seule fois une pièce équilibrée et on note son résultat. On effectue ensuite des tirages successifs dans une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire selon le procédé suivant :

- On tire une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne;
- On rajoute une boule blanche si l'on a obtenu *Pile* au lancer de pièce initial et une boule noire sinon.

1. Calculer la probabilité de tirer une boule blanche au $k-$ème tirage.
2. Sachant que l'on a tiré une boule blanche au $k-$ème tirage, calculer la probabilité d'avoir obtenu *Pile* au lancer de pièce initial.
3. Calculer la probabilité d'obtenir k boules blanches durant les k premiers tirages.

Exercice 2 ●●○ — *Répartition dans une famille*

Dans une population, la probabilité qu'une famille ait $n \in \mathbb{N}$ enfants est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = a\frac{2^n}{n!}, \qquad a > 0$$

Au sein d'une même famille, on suppose qu'il est équiprobable qu'un enfant donné soit une fille ou un garçon et qu'il y a indépendance des sexes des enfants.

1. Déterminer la valeur de a.
2. Une famille comporte au moins un enfant. Calculer la probabilité que la famille ait exactement deux enfants.
3. Calculer la probabilité qu'une famille comporte au moins une fille.
4. On suppose qu'une famille a au moins une fille. Calculer la probabilité que la famille soit constituée de deux enfants exactement.

Exercice 3 ●●○ — *Tirages avec remise dans une urne*

Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur. On répète cette opération indéfiniment.

1. Donner la probabilité que les n premières boules tirées soient rouges.
2. Justifier que la boule blanche initiale sera tirée de façon quasi-certaine.

Exercice 4 ●●○ — *Le jeu des archers*

Deux archers A_1 et A_2 disputent un match et tirent alternativement sur une cible jusqu'à ce que l'un d'eux la touche. L'archer A_1 tire en premier. Pour $i \in \{1,2\}$, l'archer A_i touche la cible avec probabilité $p_i \in]0,1[$ et on note $q_i = 1 - p_i$. On suppose que les tirs sont indépendants. Enfin, pour $i \in \{1,2\}$, on note G_i l'événement « A_i l'emporte ».

1. Calculer la probabilité que A_1 l'emporte au rang $2n+1$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer la probabilité que A_2 l'emporte au rang $2n+2$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire $P(G_1)$ et $P(G_2)$, puis la probabilité que le jeu dure indéfiniment.

4. On dit que le jeu est équitable si $P(G_1) = P(G_2)$. Donner une relation entre p_1 et p_2 pour que ce soit réalisé. Étudier le cas $p_1 > 1/2$.

Exercice 5 ●●○ *Lancer d'une pièce et loterie*

Un joueur lance une pièce équilibrée jusqu'à obtention du premier *Pile*. S'il a eu besoin de n lancers pour obtenir ce premier *Pile*, on lui fait tirer au hasard un billet de loterie parmi n billets dont un seul est gagnant.

1. Donner la probabilité que le joueur gagne.
2. Sachant que le joueur a gagné, calculer la probabilité qu'il ait obtenu le premier *Pile* au troisième lancer.

Exercice 6 ●●○ *Schéma Pile – Pile*

On lance indéfiniment une pièce de monnaie déséquilibrée amenant *Pile* avec probabilité $2/3$. Pour $n \geqslant 1$, on note A_n l'événement « Après le $n-$ème lancer, on a obtenu pour la première fois deux *Pile* consécutifs » et $a_n = P(A_n)$ ainsi que P_n : « On obtient *Pile* au $n-$ème lancer » et F_n : « On obtient *Face* au $n-$ème lancer ».

1. Calculer a_1, a_2 et a_3.
2. En utilisant le système complet $(F_1, P_1 \cap P_2, P_1 \cap F_2)$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+2} = \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{2}{9}a_n$$

3. En déduire une expression de a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et interpréter le résultat.

Exercice 7 ●●○ *Schéma Pile – Pile – Face*

On lance indéfiniment une pièce équilibrée. Pour $n \geqslant 1$, on note A_n l'événement « On obtient au moins une fois la séquence *Pile – Pile – Face* lors des n premiers lancers » et $a_n = P(A_n)$.

1. Pour $n \geqslant 3$, montrer que :

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{8}(1 - a_{n-2})$$

2. En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.
3. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois la séquence *Pile – Pile – Face* lors de cette série de lancers.

Exercice 8 ●●● *La ruine du joueur*

On joue à un jeu de *Pile* ou *Face*. À chaque coup, on obtient *Pile* avec probabilité $p \in]0,1[$ où $p \neq 1/2$ et dans ce cas, on gagne 1 euro ; dans le cas contraire, on perd 1 euro. On suppose que l'on ne peut jouer que si l'on dispose d'au moins 1 euro. Le jeu s'arrête soit lorsque l'on possède la somme de N euros (on gagne la partie), soit lorsque l'on ne possède plus rien (on est ruiné). Au départ, on dispose d'une somme de n euros avec $n \in [\![0, N]\!]$ et on note $p_N(n)$ la probabilité de gagner la partie.

1. Calculer $p_N(0)$ et $p_N(N)$.
2. En raisonnant sur le résultat du premier lancer, déterminer une relation entre les probabilités $p_N(n)$, $p_N(n+1)$ et $p_N(n-1)$ pour $n \in [\![1, N-1]\!]$.
3. Exprimer alors $p_N(n)$ en fonction de $n \in [\![0, N]\!]$, N et p.
4. Calculer la limite $\lim\limits_{N\to+\infty} p_N(n)$ et interpréter le résultat.

Exercice 9 ●●● *Descendance d'une fleur*

Au temps $n = 0$, on dispose d'une fleur $\mathscr{F}_0$. À l'instant $n = 1$, elle peut avoir deux descendances avec probabilité $p \in \,]\,0\,,1\,[$ ou aucune avec probabilité $1 - p$ avant de mourir. Ces descendances éventuelles, à l'instant $n = 2$, peuvent avoir chacune des descendances de façon mutuellement indépendantes et dans les mêmes conditions que la première fleur $\mathscr{F}_0$ avant de mourir. Et ainsi de suite.
Pour $n \geqslant 0$, on notera U_n l'événement « La lignée de la fleur $\mathscr{F}_0$ est éteinte à l'instant n » et on définit $u_n = \mathrm{P}(\mathrm{U}_n)$.

1. Calculer u_0 et u_1.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in [\,0\,,1\,]$.
3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = p u_n^2 + 1 - p$$

4. En déduire alors que $\ell = \min\left(1, \dfrac{1-p}{p}\right)$ et interpréter ce résultat.