DEVOIR SURVEILLÉ N°6

SAMEDI 20 MARS 2021

DURÉE : 4h00

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le sujet comporte trois exercices indépendants.

EXERCICE 1 – POLYNÔME DE LAGUERRE ET MÉTHODE DE QUADRATURE DE GAUSS

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

PARTIE I – PRODUIT SCALAIRE SUR $\mathbb{R}_n[X]$

Pour tout couple $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P \mid Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt$$

1. Justifier que l'intégrale définissant $(P \mid Q)$ est convergente.
2. Montrer que l'application $(\cdot|\cdot) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire.
3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. À l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt = k\int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}\,dt$$

4. Conclure que $(X^k \mid 1) = k!$ pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$.

PARTIE II – CONSTRUCTION D'UNE BASE ORTHOGONALE

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1-X)P'$$

5. Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. Écrire la matrice de α dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$.
7. En déduire que α est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(\alpha) = \{-k,\ k \in [\![0, n]\!]\}$.

On fixe un entier $k \in [\![0, n]\!]$.

8. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(\alpha + k\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$?
9. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.
10. Justifier que P_k est de degré k.
11. Déterminer P_0 et P_1. Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

On fixe un couple $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

12. Montrer la relation :

$$(\alpha(P) \mid Q) = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

13. En déduire que $(\alpha(P) \mid Q) = (P \mid \alpha(Q))$.

14. Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
*On pourra utiliser les questions **9** et **13**.*

Partie III – Méthode de quadrature de Gauss

On admet que le polynôme P_n admet n racines réelles **distinctes** que l'on note $x_1, \ldots, x_n$. On souhaite montrer qu'il existe des scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i) \tag{$\star$}$$

15. Montrer qu'un n−uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $(\star)$ si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}$$

16. En déduire qu'il existe un unique n−uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $(\star)$.

17. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que :

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t \neq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i)$$

Exercice 2 – Étude d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 2x^3 \tag{E}$$

Partie I – Solution particulière de l'équation homogène

Dans cette première partie, on souhaite déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0 \tag{H}$$

On fixe une suite de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ ait un rayon de convergence $r > 0$ et on définit la fonction $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

18. Justifier que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ et que les fonctions f' et f'' sont développables en série entière. Exprimer avec la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les développements en série entière respectifs des fonctions f' et f'' en précisant leur rayon de convergence.

19. Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n\geqslant 2}$ de nombres réels non nuls telle que pour tout $x \in]-r, r[$, on a :

$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n$$

20. Montrer que f est solution de (H) sur l'intervalle $]-r, r[$ si et seulement si $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

21. En déduire que si f est solution de (H) sur $]-r, r[$, alors $r \geqslant 1$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}$$

22. Réciproquement, montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction :

$$g :]-1,1[\to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{\lambda x}{1-x}$$

est une solution de (H) sur $]-1,1[$ développable en série entière.

Partie II – Solution de (E) sur $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$

On désigne par I l'un des intervalles $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$. Soit $y : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On définit la fonction $z : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ par la relation :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad z(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) y(x)$$

23. Justifier que z est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle I, puis exprimer z' et z'' avec y, y' et y''.

24. Montrer que y est solution de (E) sur I si et seulement si z est solution sur I de l'équation différentielle :

$$xz'' + z' = 2x \tag{E_1}$$

25. Montrer que si z est solution de (E_1) sur I, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x$$

26. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur I.

Partie III – Solution de (E) sur $]0,+\infty[$

27. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur $]0,+\infty[$.

Exercice 3 – Étude d'une marche aléatoire

On considère trois points distincts du plan nommés A, B et C. Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.

À l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

- Le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n; plus précisément, il ne dépend pas des positions occupées aux autres étapes précédentes.
- pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement « le pion se trouve en A à l'étape n », B_n l'évènement « le pion se trouve en B à l'étape n » et C_n l'évènement « le pion se trouve en C à l'étape n ». On note également :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \mathrm{P}(\mathrm{A}_n), \quad q_n = \mathrm{P}(\mathrm{B}_n), \quad r_n = \mathrm{P}(\mathrm{C}_n) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$$

et on considère la matrice :

$$\mathrm{M} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans le démontrer** le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{M}^n = \frac{1}{3\cdot 4^n}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}$$

On rappelle que si E et F sont deux évènements avec $\mathrm{P(F)} > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $\mathrm{P(E \mid F)}$ ou $\mathrm{P_F(E)}$) par :

$$\mathrm{P(E \mid F)} = \mathrm{P_F(E)} = \frac{\mathrm{P(E \cap F)}}{\mathrm{P(F)}}$$

Partie I – Calcul des probabilités

28. Calculer les nombres p_n, q_n et r_n pour $n = 0$ et $n = 1$.

29. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation $\mathrm{V}_{n+1} = \mathrm{M}\mathrm{V}_n$.

30. En déduire que $\mathrm{V}_n = \mathrm{M}^n\mathrm{V}_0$, puis une expression de p_n, q_n et r_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

31. Déterminer les limites respectives des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Interpréter le résultat.

Partie II – Nombre moyen de passages en A

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre moyen de passages du pion en A entre l'étape 1 et l'étape n et on définit la variable aléatoire :

$$\mathrm{X}_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathrm{A}_n \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{si } \overline{\mathrm{A}_n} \text{ est réalisé} \end{cases}$$

32. Interpréter la variable aléatoire $\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n$ et le nombre $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n)$.

33. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

34. En déduire une expression de a_n.

Partie III – Temps d'attente avant le premier passage en B

On définit la variable aléatoire $\mathrm{T_B}$ de la façon suivante :

- si le pion ne passe jamais en B, on pose $\mathrm{T_B} = 0$;
- sinon, $\mathrm{T_B}$ est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B.

Nous allons déterminer la loi de $\mathrm{T_B}$ et son espérance.

35. Calculer $\mathrm{P(T_B = 1)}$ et $\mathrm{P(T_B = 2)}$.

36. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\overline{\mathrm{B}_n}$ en fonction de A_n et C_n.

37. Établir que :

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}_3 \cap \overline{\mathrm{B}_2} \cap \overline{\mathrm{B}_1}) = \frac{1}{4}\mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}_2} \cap \overline{\mathrm{B}_1}) \qquad \text{puis que} \qquad \mathrm{P}(\mathrm{B}_3 \mid \overline{\mathrm{B}_2} \cap \overline{\mathrm{B}_1}) = \frac{1}{4}$$

Dans la suite, on admet la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}\left(\mathrm{B}_{n+1} \mid \overline{\mathrm{B}_1} \cap \cdots \cap \overline{\mathrm{B}_n}\right) = \frac{1}{4}$$

38. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathrm{P(T_B} = k)$. Que vaut $\mathrm{P(T_B = 0)}$?

39. Justifier que la variable aléatoire $\mathrm{T_B}$ admet une espérance. Quelle est l'espérance de $\mathrm{T_B}$?