Lycée Descartes
Tours

DEVOIR SURVEILLÉ N°6

PSI
2020 – 2021

CORRIGÉ

EXERCICE 1 – POLYNÔME DE LAGUERRE ET MÉTHODE DE QUADRATURE DE GAUSS

PARTIE I – PRODUIT SCALAIRE SUR $\mathbb{R}_n[X]$

1. La fonction $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et le seul problème d'intégration est en $+\infty$. De plus, par croissances comparées, on a :

$$t^2 P(t)Q(t)e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

de sorte qu'en $+\infty$ la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est négligeable devant $t \mapsto 1/t^2$, qui est une fonction de Riemann intégrable au voisinage de $+\infty$. Par théorème de comparaison, $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ et donc sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, l'intégrale définissant $(P|Q)$ est convergente.

2. On vérifie une à une les propriétés du produit scalaire.

- Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ on a :

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} Q(t)P(t)e^{-t}\,dt = (Q|P),$$

donc $(\cdot\,|\,\cdot)$ est symétrique.

- Pour tout $(P, Q, R) \in \mathbb{R}_n[X]^3$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a par linéarité de l'intégrale généralisée :

$$\begin{aligned}(\lambda P + Q|R) &= \int_0^{+\infty} (\lambda P(t) + Q(t))R(t)e^{-t}\,dt \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} P(t)R(t)e^{-t}\,dt + \int_0^{+\infty} Q(t)R(t)e^{-t}\,dt \\ &= \lambda(P|R) + (Q|R)\end{aligned}$$

donc $(\cdot\,|\,\cdot)$ est linéaire à gauche.

- Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $P^2(t)e^{-t} \geqslant 0$ pour tout $t \geqslant 0$ de sorte que par positivité de l'intégrale généralisée :

$$(P\,|\,P) = \int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}\,dt \geqslant 0$$

et $(\cdot\,|\,\cdot)$ est donc positif.

- Enfin, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, si $(P\,|\,P) = 0$, alors :

$$\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}\,dt = 0$$

Or $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}_+$. On obtient par propriété de nullité de l'intégrale généralisée que $P^2(t)e^{-t} = 0$ pour tout $t \geqslant 0$. La fonction exp ne s'annulant jamais, cela donne $P^2 = 0$ puis $P = 0$ sur $\mathbb{R}_+$. Le polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ a donc une infinité de racines et on conclut que $P = 0$. Cela démontre le caractère défini positif de $(\cdot\,|\,\cdot)$.

En conclusion, $(\cdot\,|\,\cdot)$ définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Fixons $x > 0$. On réalise une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^x t^k e^{-t}\,\mathrm{d}t &= \left[-t^k e^{-t}\right]_0^x + \int_0^x k t^{k-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= -x^k e^{-x} + k\int_0^x t^{k-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Grâce à la question **1** appliquée avec les polynômes $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^k$ et $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = 1$ puis avec $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^{k-1}$ et $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = 1$, on obtient la convergence des intégrales :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

En passant à la limite quand x tend vers $+\infty$ dans la relation précédente et par croissance comparée, il vient :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,\mathrm{d}t = k\int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

4. Montrons par récurrence que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $(\mathrm{X}^k|1) = k!$.

- **Initialisation** Pour $k = 0$, on a, en utilisant un crochet généralisé :

$$(\mathrm{X}^0|1) = (1|1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$$

- **Hérédité** On suppose le résultat vérifié au rang $k \in [\![0, n-1]\!]$. D'après la question précédente, comme on remarque que $k+1 \in [\![1, n]\!]$, on a en utilisant l'hypothèse de récurrence que :

$$(\mathrm{X}^{k+1}|1) = \int_0^{+\infty} t^{k+1} e^{-t}\,\mathrm{d}t = (k+1)\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,\mathrm{d}t = (k+1)(\mathrm{X}^k|1) = (k+1)k! = (k+1)!$$

ce qui conclut la phase d'hérédité.

D'où le résultat par principe de récurrence.

Partie II – Construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ par :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}], \quad \alpha(\mathrm{P}) = \mathrm{XP}'' + (1-\mathrm{X})\mathrm{P}'$$

5. Pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, on a $\alpha(\mathrm{P}) = \mathrm{XP}'' + (1-\mathrm{X})\mathrm{P}'$ qui est bien un polynôme. De plus, comme $\deg(\mathrm{P}) \leqslant n$, on a $\deg(\mathrm{P}') \leqslant \deg(\mathrm{P}) - 1 \leqslant n-1$ et $\deg(\mathrm{P}'') \leqslant n-2$, on a :

$$\deg(\alpha(\mathrm{P})) \leqslant \max(\deg(\mathrm{XP}''), \deg((1-\mathrm{X})\mathrm{P}')) \leqslant \max(1+n-2, 1+n-1) \leqslant n$$

de sort que $\alpha(\mathrm{P})$ est bien dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
Enfin, on vérifie la linéarité en prenant $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ et en écrivant, grâce à la linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned}\alpha(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q}) &= \mathrm{X}(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q})'' + (1-\mathrm{X})(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q})' \\ &= \mathrm{X}(\lambda\mathrm{P}''+\mathrm{Q}'') + (1-\mathrm{X})(\lambda\mathrm{P}'+\mathrm{Q}') \\ &= \lambda\mathrm{XP}'' + \mathrm{XQ}'' + \lambda(1-\mathrm{X})\mathrm{P}' + (1-\mathrm{X})\mathrm{Q}' = \lambda(\mathrm{XP}'' + (1-\mathrm{X})\mathrm{P}') + (\mathrm{XQ}'' + (1-\mathrm{X})\mathrm{Q}') \\ &= \lambda\alpha(\mathrm{P}) + \alpha(\mathrm{Q})\end{aligned}$$

On a bien montré que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

6. On a immédiatement $\alpha(1) = 0$ et $\alpha(\mathrm{X}) = 1-\mathrm{X}$ et, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$:

$$\alpha(\mathrm{X}^k) = \mathrm{X} \times k(k-1)\mathrm{X}^{k-2} + (1-\mathrm{X}) \times k\mathrm{X}^{k-1} = -k\mathrm{X}^k + k^2\mathrm{X}^{k-1}$$

Cela nous permet d'écrire la matrice M de α dans la base canonique $(1, \mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^n)$ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$:

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -(n-1) & n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n \end{pmatrix}.$$

7. On remarque que la matrice M de α dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ est triangulaire supérieure de sorte que son spectre est constitué des éléments de la diagonale de M. On a donc :

$$\mathrm{sp}(\alpha) = \{-k,\ k \in [\![0, n]\!]\}$$

On conclut que α est diagonalisable puisqu'il admet $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ valeurs propres distinctes.

8. Comme α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ ayant $n+1$ valeurs propres distinctes, par le cours, toutes ces valeurs propres sont nécessairement simples. Ainsi $-k$ est valeur propre simple de α et :

$$\dim(\mathrm{Ker}(\alpha + k\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]})) = \dim \mathrm{E}_{-k}(\alpha) = 1$$

9. Soit (Q_k) une base de $\mathrm{Ker}(\alpha + k\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$ avec $Q_k \neq 0$. Notons a le coefficient dominant de Q_k (non nul car $Q_k \neq 0$).
Alors $P_k = Q_k/a$ est un polynôme ayant un coefficient dominant égal à 1.
De plus, $P_k = Q_k/a \in \mathrm{Vect}(Q_k) = \mathrm{Ker}(\alpha + k\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$ donc :

$$(\alpha + k\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]})(P_k) = 0 \iff \alpha(P_k) + kP_k = 0 \iff \alpha(P_k) = -kP_k$$

Il existe donc bien un polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.
Supposons qu'il existe un autre polynôme $R_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.
Alors $R_k \in \mathrm{Ker}(\alpha + k\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}) = \mathrm{Vect}(Q_k) = \mathrm{Vect}(Q_k/a) = \mathrm{Vect}(P_k)$ et il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $R_k = \lambda P_k$. Mais les deux polynômes P_k et R_k ont le même coefficient dominant, à savoir 1, de sorte que $\lambda = 1$, ce qui donne $R_k = P_k$.
Cela prouve l'unicité.

10. Soit d le degré de P_k. On a $d \in [\![0, n]\!]$ car P_k est non nul et $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$. Il existe donc des scalaires $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tels que $P_k = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ avec $a_d = 1$ puisque P_k est unitaire. Alors, par linéarité de α et grâce aux calculs effectués en question **6**, on obtient :

$$\alpha(P_k) = \sum_{i=0}^{d} a_i \alpha(X^i) = 0 + a_1(1-X) + \sum_{i=2}^{d} a_i(-iX^i + i^2X^{i-1}) = a_1(1-X) - \sum_{i=2}^{d} i a_i X^i + \sum_{i=2}^{d} a_i i^2 X^{i-1}$$

Comme on a par ailleurs $\alpha(P_k) = -kP_k$ puisque $P_k \in \mathrm{Ker}(\alpha + k\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$, on obtient, en identifiant les coefficients dominants que $-da_d = -ka_d$. Comme $a_d = 1$, il vient $d = k$ et P_k est de degré k.

11.
- On a $\alpha(1) = 0 = -0 \times 1$ et le coefficient dominant de 1 est 1, donc, par unicité de P_0, on a $P_0 = 1$.
- On a $\alpha(X) = 1 - X$ donc $\alpha(X-1) = \alpha(X) - \alpha(1) = 1 - X + 0 = -(X-1)$, et le coefficient dominant de $X-1$ est 1, donc, par unicité de P_1, on a $P_1 = X - 1$.
- Le coefficient dominant de $X^2 - 4X + 2$ est 1 et :

$$\alpha(X^2 - 4X + 2) = \alpha(X^2) - 4\alpha(X) + 2\alpha(1) = -2X^2 + 4X - 4(1-X) + 0 = -2X^2 + 8X - 4 = -2(X^2 - 4X + 2)$$

donc, par unicité de P_2, on a $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

12. Dans la suite, toutes les intégrales considérées sont convergentes en vertu de la question **1**. Par linéarité, on a :

$$(\alpha(P)|Q) = \int_0^{+\infty} (tP''(t) + (1-t)P'(t))Q(t)e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} (tP''(t) + P'(t))Q(t)e^{-t}\,dt - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q(t)e^{-t}\,dt$$

On remarque que $t \mapsto tP''(t) + P'(t)$ est la dérivée de $t \mapsto tP'(t)$ de sorte que, pour $x > 0$, on réalise l'intégration par parties suivante :

$$\begin{aligned}\int_0^{x} (tP''(t) + P'(t))Q(t)e^{-t}\,dt &= \left[tP'(t)Q(t)e^{-t}\right]_0^x - \int_0^x tP'(t)(Q'(t)e^{-t} - Q(t)e^{-t})\,dt \\ &= xP'(x)Q(x)e^{-x} - \int_0^x tP'(t)Q'(t)e^{-t}\,dt + \int_0^x tP'(t)Q(t)e^{-t}\,dt\end{aligned}$$

En passant à la limite quand x tend vers $+\infty$, il vient par croissance comparée :

$$\int_0^{+\infty} (tP''(t) + P'(t))Q(t)e^{-t}\,dt = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\,dt + \int_0^{+\infty} tP'(t)Q(t)e^{-t}\,dt$$

On a donc :

$$(\alpha(P)|Q) = \int_0^{+\infty} (tP''(t) + P'(t))Q(t)e^{-t}\,dt - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q(t)e^{-t}\,dt = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\,dt$$

13. Par symétrie des rôles de P et Q, on a aussi :

$$(\alpha(Q)|P) = -\int_0^{+\infty} tQ'(t)P'(t)e^{-t}\,dt = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\,dt$$

donc, par symétrie du produit scalaire :

$$(\alpha(P)|Q) = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\,dt = (\alpha(Q)|P) = (P|\alpha(Q))$$

14. Soit $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$. En utilisant la relation vérifiée par les $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ et le résultat précédent, on a :

$$(\alpha(P_i)|P_j) = (-iP_i|P_j) = -i(P_i|P_j) \qquad \text{et} \qquad (\alpha(P_i)|P_j) = (P_i|\alpha(P_j)) = (P_i|-jP_j) = -j(P_i|P_j)$$

On obtient ainsi $-i(P_i|P_j) = -j(P_i|P_j)$, c'est-à-dire $(i-j)(P_i|P_j) = 0$ et donc, si $i \neq j$, $(P_i|P_j) = 0$. On vient de montrer que la famille $(P_0,\dots,P_n)$ est orthogonale.
De plus, elle est composée de polynômes non nuls car unitaires et de degrés deux à deux distincts grâce à la question **10**. Cette famille est donc libre. Comme elle est libre et composée de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel de dimension $n+1$, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
La famille $(P_0,\dots,P_n)$ est donc bien une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie III – Méthode de quadrature de Gauss

15. On rappelle que, avec la question **4**, on a :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt = (1|X^k) = k!$$

Supposons qu'un n−uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ vérifie la condition $(\star)$. Pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, la relation $(\star)$ appliquée avec $P(X) = X^k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donne :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k \quad \iff \quad k! = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k$$

Ceci valant pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, le n-uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie donc bien :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}$$

Réciproquement, si n−uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}$$

alors, pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, la ligne $k+1$ de cette égalité matricielle donne :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k = k! = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt$$

Ainsi, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ que l'on écrit sous la forme $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, on obtient par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i a_k x_i^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k e^{-t}\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\,dt \end{aligned}$$

ce qui démontre bien $(\star)$.

16. La matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

est une matrice de Vandermonde qui, par le cours, est inversible puisque les $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont deux à deux distincts. Le système à n équations et n inconnues $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}$$

admet donc un unique $n-$uplet solution. En utilisant la question précédente, on conclut à l'existence et l'unicité de $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ vérifiant $(\star)$

17. Soit $\mathrm{P}=\mathrm{P}_n^2$. Avec la question **10**, on a $\deg(\mathrm{P})=2\deg(\mathrm{P}_n)=2n$, donc $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_{2n}[\mathrm{X}]$. Supposons par l'absurde que :

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{P}(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathrm{P}(x_i)$$

Le terme de gauche est $(\mathrm{P}_n\,|\,\mathrm{P}_n)$ et celui de droite vaut 0 par définition des $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. On obtient donc $(\mathrm{P}_n\,|\,\mathrm{P}_n)=0$ puis $\mathrm{P}_n=0$ par caractère défini positif du produit scalaire. Ceci est absurde car P_n est non nul puisque unitaire. Ainsi, pour notre choix de P, on a :

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{P}(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t\neq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathrm{P}(x_i)$$

Exercice 2 – Étude d'une équation différentielle

Partie I – Solution particulière de l'équation homogène

18. La fonction f est développable en série entière sur $]-r,r[$ donc, par le cours, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ et on obtient ses dérivées f' et f'' sur $]-r,r[$ en dérivant terme à terme :

$$\forall x\in\,]-r,r[,\quad f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}\qquad\text{et}\qquad f''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

Cela prouve que f' et f'' sont développables en série entière sur $]-r,r[$. De plus, toujours par le cours, on sait que les séries entières définissant f, f' et f'' ont même rayon de convergence, à savoir r dans notre cas.

19. On fixe $x\in]-r,r[$ et on écrit :

$$\begin{aligned}
x^2(1-x)f''(x)-x(1+x)f'(x)+f(x)&=x^2(1-x)\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-x(1+x)\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\\
&=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n-\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n+1}-\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n-\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\\
&=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n-\sum_{n=3}^{+\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^n-\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n-\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\\
&=-a_1x+a_0+a_1x+\sum_{n=2}^{+\infty}\big(n(n-1)a_n-(n-1)(n-2)a_{n-1}-na_n-(n-1)a_{n-1}+a_n\big)x^n\\
&=a_0+\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)^2(a_n-a_{n-1})x^n
\end{aligned}$$

En posant, $b_n=(n-1)^2$ pour tout $n\geqslant 2$, on a donc bien :

$$x^2(1-x)f''(x)-x(1+x)f'(x)+f(x)=a_0+\sum_{n=2}^{+\infty}b_n(a_n-a_{n-1})x^n$$

20. La fonction f est solution de (H) sur $]-r,r[$ si et seulement si :

$$\forall x \in]-r,r[,\quad x^2(1-x)f''(x)-x(1+x)f'(x)+f(x)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \forall x \in]-r,r[,\quad a_0+\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)^2(a_n-a_{n-1})x^n=0$$

Par unicité du développement en série entière, ceci équivaut à :

$$\begin{cases} a_0=0 \\ \forall n\geqslant 2,\ \ (n-1)^2(a_n-a_{n-1})=0 \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} a_0=0 \\ \forall n\geqslant 2,\ \ a_n=a_{n-1} \end{cases}$$

D'où f est solution de (H) sur $]-r,r[$ si et seulement si $a_0=0$ et $a_{n+1}=a_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

21. D'après la question précédente, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir du rang 1 donc, en posant $\lambda=a_1\in\mathbb{R}$, on a, pour tout $n\geqslant 1$, $a_n=a_1=\lambda$ et $a_0=0$. Par suite, si f est solution de (H) sur $]-r,r[$, alors f s'écrit :

$$\forall x \in]-r,r[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda x^n$$

Or, la série entière $\sum_{n\geqslant1}x^n$ a pour rayon de convergence 1, donc $r=1$ si $\lambda\neq0$ et $r=+\infty$ si $\lambda=0$. Cela prouve $r\geqslant1$. De plus, par développement en série entière usuel, on a :

$$\forall x\in]-1,1[,\quad f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda x^n=\lambda x\sum_{\ell=0}^{+\infty}x^\ell=\frac{\lambda x}{1-x}$$

22. Réciproquement, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, par connaissance des développements en série entière usuels, la fonction g est développable en série entière sur $]-1,1[$ avec :

$$\forall x\in]-1,1[,\quad g(x)=\lambda x\times\frac{1}{1-x}=\lambda x\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda x^{n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda x^n$$

De plus, d'après la question **20**, g est solution de (H) sur $]-1,1[$.

Partie II – Solution de (E) sur $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$

23. La fonction $x\longmapsto 1/X-1$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$ de sorte que z est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I comme produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur I. De plus :

$$\forall x\in \mathrm{I},\quad z'(x)=-\frac{1}{x^2}y(x)+\left(\frac{1}{x}-1\right)y'(x)\qquad\text{et}\qquad z''(x)=\frac{2}{x^3}y(x)-\frac{2}{x^2}y'(x)+\left(\frac{1}{x}-1\right)y''(x)$$

24. Supposons y solution de (E) sur I. En particulier, y est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I et, avec la question précédente, z est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I avec :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathrm{I},\quad xz''(x)+z'(x)&=x\left(\frac{2}{x^3}y(x)-\frac{2}{x^2}y'(x)+\left(\frac{1}{x}-1\right)y''(x)\right)+\left(-\frac{1}{x^2}y(x)+\left(\frac{1}{x}-1\right)y'(x)\right)\\ &=\frac{2y(x)-2xy'(x)+x^2(1-x)y''(x)-y(x)+x(1-x)y'(x)}{x^2}\\ &=\frac{x^2(1-x)y''(x)-x(x+1)y'(x)+y(x)}{x^2}\\ &=\frac{2x^3}{x^2}\qquad\text{car } y \text{ est solution de (E) sur I}\\ &=2x\end{aligned}$$

de sorte que z est bien solution de (E_1) sur I.
Réciproquement, supposons z solution de (E_1) sur I. En particulier, z est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I. De plus, pour tout $x\in\mathrm{I}$, comme $x\notin\{0,1\}$:

$$z(x)=\left(\frac{1}{x}-1\right)y(x)\quad\Longleftrightarrow\quad z(x)=\frac{1-x}{x}y(x)\quad\Longleftrightarrow\quad y(x)=\frac{x}{1-x}z(x)\quad\Longleftrightarrow\quad y(x)=\left(1-\frac{1}{1-x}\right)z(x)$$

Par suite, y est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I comme produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$. D'après le calcul qui précède, on a :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad xz''(x) + z'(x) = \frac{x^2(1-x)y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x)}{x^2}$$

Cela donne :

$$x^2(1-x)y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x) = x^2(xz''(x) + z'(x)) = x^2(2x) = 2x^3$$

où l'on a utilisé que z est solution de (E_1) sur I. Ainsi y est bien solution de (E) sur I.

25. On remarque que z est solution de (E_1) sur I si et seulement si z' est solution de l'équation différentielle :

$$xy' + y = 2x \quad \iff \quad y' + \frac{1}{x}y = 2$$

On résout cette équation différentielle linéaire d'ordre 1 sous forme résolue :

- Par le cours, l'équation homogène a pour solutions $x \mapsto \lambda e^{-\ln x} = \lambda / x$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto x$ est une solution particulière « évidente ».

On conclut qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que z' s'écrit :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x$$

26. Avec les questions **24** et **25**, on a :

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de (E) sur I} \quad &\iff \quad z \text{ solution de } (\mathrm{E}_1) \text{ sur I} \\
&\iff \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x \\
&\iff \quad \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad z(x) = \lambda \ln(x) + \frac{x^2}{2} + \mu \\
&\iff \quad \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad y(x) = \frac{x}{1-x} z(x) = \frac{2\lambda x \ln(x) + x^3 + 2\mu x}{2(1-x)}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E) sur I est donc :

$$\left\{ x \longmapsto \frac{\lambda x \ln(x) + x^3 + \mu x}{2(1-x)}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Partie III – Solution de (E) sur $]0, +\infty[$

27. On procède par analyse–synthèse.

Analyse Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. En particulier, f est solution de (E) sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ de sorte que, d'après la partie **II**, il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tels que :

$$\forall x \in]0,1[, \quad f(x) = \frac{ax\ln(x) + x^3 + bx}{2(1-x)} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]1,+\infty[, \quad f(x) = \frac{cx\ln(x) + x^3 + dx}{2(1-x)}$$

Pour tout $x > 1$, en posant $x = 1 + h$, ce qui équivaut à $h = x - 1$, on a, par développement limité :

$$\begin{aligned}
f(x) = f(1+h) &= \frac{c(1+h)\ln(1+h) + (1+h)^3 + d(1+h)}{-2h} \\
&= \frac{c(1+h)\,(h + o(h)) + 1 + 3h + o(h) + d + dh}{-2h} \\
&= \frac{ch + 1 + 3h + d + dh + o(h)}{-2h} \\
&= -\frac{1+d}{2h} - \frac{c+d+3}{2} + o(1) \\
&= -\frac{1+d}{2(x-1)} - \frac{c+d+3}{2} + o(1)
\end{aligned}$$

De façon similaire, pour tout $x \in]0,1[$, en posant $x = 1-h$ soit $h = 1-x$, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) = f(1-h) &= \frac{a(1-h)\ln(1-h) + (1-h)^3 + b(1-h)}{2h} \\
&= \frac{a(1-h)\left(-h + o(h)\right) + 1 - 3h + o(h) + b - bh}{2h} \\
&= \frac{-ah + 1 - 3h + b - bh + o(h)}{2h} \\
&= \frac{1+b}{2h} - \frac{a+b+3}{2} + o(1) \\
&= -\frac{1+b}{2(x-1)} - \frac{a+b+3}{2} + o(1)
\end{aligned}$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et en particulier en 1, donc f doit avoir une limite finie en 1^+ et 1^-. Avec les deux calculs qui précèdent, cela donne nécessairement $d = b = -1$ sans quoi f tend vers $\pm\infty$ en 1^+ et en 1^-. Comme f est continue en 1, on doit avoir, avec les valeurs imposées pour b et d :

$$-\frac{c+2}{2} = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\frac{a+2}{2} \qquad \text{soit} \qquad a = c \quad \text{et} \quad f(1) = -\frac{c+2}{2}.$$

En conclusion, si f existe, alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax\ln(x) + x^3 - x}{2(1-x)} & \text{si } x \neq 1 \\ -\dfrac{a+2}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Synthèse Réciproquement, si f est définie ainsi, alors f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ par opérations sur les fonctions usuelles. De plus, pour tout $x \in]0,2[\setminus\{1\}$, en posant $x = 1+h$ avec $h \in]-1,1[\setminus\{0\}$ et en utilisant le développement en série entière de $t \mapsto \ln(1+t)$, il vient :

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{ax\ln(x) + x^3 - x}{2(1-x)} &= \frac{ax\ln(x)}{2(1-x)} - \frac{x(x+1)}{2} = \frac{ax\ln(1+h)}{-2h} - \frac{x(x+1)}{2} \\
&= -\frac{ax}{2h}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{h^n}{n} - \frac{x(x+1)}{2} = -\frac{ax}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n h^n}{n+1} - \frac{x(x+1)}{2} \\
&= g(x-1)
\end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$g : u \mapsto -\frac{a(1+u)}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n u^n}{n+1} - \frac{(1+u)(2+u)}{2}$$

L'égalité est encore valable pour $x = 1$ car :

$$f(1) = -\frac{a+2}{2} \qquad \text{et} \qquad g(0) = -\frac{a}{2} \times 1 - \frac{1\times 2}{2} = -\frac{a+2}{2}$$

de sorte que $f(x) = g(x-1)$ pour tout $x \in]0,2[$. Or, g est développable en série entière sur $]-1,1[$ donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1,1[$. Cela donne que $f : x \mapsto g(x-1)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,2[$ comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$. Ainsi, f est de classe $\mathscr{C}^2$ en 1, et, par suite, sur $\mathbb{R}_+^*$.
Enfin, par construction, f est solution de (E) sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$. De plus, comme f est de classe $\mathscr{C}^2$ en 1, $x \mapsto x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x)$ est continue en 1, tout comme le second membre $x \mapsto 2x^3$ de sorte que f est aussi solution de (E) en 1.

Conclusion Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{ax\ln(x) + x^3 - x}{2(1-x)} & \text{si } x \neq 1 \\ -\dfrac{a+2}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases} \qquad \text{où } a \in \mathbb{R}$$

Exercice 3 – Étude d'une marche aléatoire

Partie I – Calcul des probabilités

28. Pour $n=0$, le pion se trouve sur le point A, on a $p_0=1$ et $q_0=r_0=0$.
D'après l'énoncé, $P_{A_n}(A_{n+1})=1/2$ et $P_{A_n}(B_{n+1})=P_{A_n}(C_{n+1})=1/4$ pour $n\geqslant 0$ donc, comme $A_0=\Omega$, on a :

- $p_1=P(A_1)=P(A_0\cap A_1)=P(A_0)P_{A_0}(A_1)=1\times 1/2=1/2$
- $q_1=P(B_1)=P(A_0\cap B_1)=P(A_0)P_{A_0}(B_1)=1\times 1/4=1/4$
- $r_1=P(C_1)=P(A_0\cap C_1)=P(A_0)P_{A_0}(C_1)=1\times 1/4=1/4$

29. Fixons $n\in\mathbb{N}$. On a d'après l'énoncé :

$$P_{A_n}(A_{n+1})=1/2 \qquad \text{et} \qquad P_{B_n}(A_{n+1})=P_{C_n}(A_{n+1})=1/4$$

D'où, d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (A_n,B_n,C_n) :

$$p_{n+1}=P(A_{n+1})=P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1})+P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1})+P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1})=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{4}(q_n+r_n)$$

De même, on a :

$$q_{n+1}=\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{4}(p_n+r_n) \qquad \text{et} \qquad r_{n+1}=\frac{1}{2}r_n+\frac{1}{4}(p_n+q_n)$$

On conclut alors que :

$$MV_n=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2p_n+q_n+r_n\\ p_n+2q_n+r_n\\ p_n+q_n+2r_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{n+1}\\ q_{n+1}\\ r_{n+1}\end{pmatrix}=V_{n+1}$$

30. Montrons par récurrence que $V_n=M^nV_0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

- **Initialisation** Pour $n=0$, on a $M^0=I_3$ donc on a bien $M^0V_0=I_3V_0=V_0$.
- **Hérédité** On suppose le résultat vrai au rang $n\in\mathbb{N}$. Il vient : $V_{n+1}=MV_n=MM^nV_0=M^{n+1}V_0$, ce qui conclut la phase d'hérédité.

D'où le résultat par principe de récurrence.
Enfin, avec l'expression des puissances de M donnée par l'énoncé, il vient :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad V_n=M^nV_0=\frac{1}{3\cdot 4^n}\begin{pmatrix}4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1\\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1\\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{3\cdot 4^n}\begin{pmatrix}4^n+2\\ 4^n-1\\ 4^n-1\end{pmatrix}$$

Cela permet de conclure que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad p_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3\cdot 4^n} \qquad \text{et} \qquad q_n=r_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 4^n}$$

31. Étant donné que q^n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ si $q\in\,]-1,1[$, on obtient que les suites $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(q_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent toutes vers $1/3$ lorsque n tend vers $+\infty$.
On peut en déduire que, après un grand nombre d'étapes, les trois emplacements tendent à être équiprobables.

Partie II – Nombre moyen de passages en A

32. La variable aléatoire $X_1+\cdots+X_n$ représente le nombre de passage du pion en A entre l'étape 1 et l'étape n de sorte que $E(X_1+\ldots+X_n)$ représente le nombre moyen de passages du pion en A entre l'étape 1 et l'étape n, à savoir a_n.

33. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, X_n est à valeurs dans $\{0,1\}$ et suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $P(X_n=1)=P(A_n)=p_n$. Par le cours, X_n admet une espérance et $E(X_n)=p_n$.

34. La variable $X_1+\ldots+X_n$ admet une espérance comme combinaison linéaire de variables admettant une espérance et, par linéarité de l'espérance et en utilisant la question **30** :

$$a_n = E(X_1+\ldots+X_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3\cdot 4^k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4^k} = \frac{n}{3}+\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4^k}$$

En reconnaissant la somme des premiers termes d'une suite géométrique, on conclut que :

$$a_n = \frac{n}{3}+\frac{2}{12}\,\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{n}{3}+\frac{2}{9}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

Partie III – Temps d'attente avant le premier passage en B

35. On rappelle que le pion se trouve en A à l'étape 0. Ainsi, on a $P(T_B=1)=P(B_1)=1/4$. De même, on obtient par incompatibilité :

$$\begin{aligned}
P(T_B=2) &= P((A_1\cap B_2)\cup(C_1\cup B_2)) = P(A_1\cap B_2)+P(C_1\cap B_2)\\
&= P(A_1)P_{A_1}(B_2)+P(C_1)P_{C_1}(B_2) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}
\end{aligned}$$

36. Pour $n\in\mathbb{N}$, on a $\overline{B_n}=A_n\cup C_n$ puisque $A_n\cup B_n\cup C_n=\Omega$ car (A_n,B_n,C_n) est un système complet d'événements.

37. Avec l'identité $\overline{B_2}=A_2\cup C_2$ on a $\overline{B_2}\cap\overline{B_1}=(A_2\cap\overline{B_1})\cup(C_2\cap\overline{B_1})$ et il vient :

$$\begin{aligned}
P(B_3\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_1}) &= P\big((B_3\cap A_2\cap\overline{B_1})\cup(B_3\cap C_2\cap\overline{B_1})\big)\\
&= P(B_3\cap A_2\cap\overline{B_1})+P(B_3\cap C_2\cap\overline{B_1}) \qquad \text{par incompatibilité}\\
&= P(A_2\cap\overline{B_1})P_{A_2\cap\overline{B_1}}(B_3)+P(C_2\cap\overline{B_1})P_{C_2\cap\overline{B_1}}(B_3)\\
&= P(A_2\cap\overline{B_1})\times\frac{1}{4}+P(C_2\cap\overline{B_1})\times\frac{1}{4}\\
&= \frac{1}{4}\big(P(A_2\cap\overline{B_1})+P(C_2\cap\overline{B_1})\big)\\
&= \frac{1}{4}P\big((A_2\cap\overline{B_1})\cup(C_2\cap\overline{B_1})\big) \qquad \text{par incompatibilité}\\
&= \frac{1}{4}P(\overline{B_2}\cap\overline{B_1})
\end{aligned}$$

On a alors :

$$P(B_3|\overline{B_2}\cap\overline{B_1}) = \frac{P(B_3\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_1})}{P(\overline{B_2}\cap\overline{B_1})} = \frac{1}{4}$$

38. Soit $k\geqslant 3$. En utilisant la formule des probabilités composées et le résultat admis par l'énoncé, on a :

$$\begin{aligned}
P(T_B=k) &= P(\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\cdots\cap\overline{B_{k-1}}\cap B_k)\\
&= P(\overline{B_1})\times\prod_{i=1}^{k-2}P_{\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_i}}(\overline{B_{i+1}})\times P_{\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{k-1}}}(B_k)\\
&= \frac{3}{4}\times\prod_{i=1}^{k-2}\left(1-P_{\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_i}}(B_{i+1})\right)\times\frac{1}{4}\\
&= \frac{3}{4}\times\prod_{i=1}^{k-2}\left(\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}
\end{aligned}$$

Cette formule est encore valable pour $k=1$ et $k=2$ d'après les expressions trouvées à la question **35** de sorte que :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad P(T_B=k)=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$$

Comme $(\mathrm{T_B} = k)_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, on a :

$$\mathrm{P}(\mathrm{T_B} = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{T_B} = k) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = 1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 0$$

où l'on a fait apparaître une série géométrique convergente de raison $3/4$.

39. On vient de voir que $\mathrm{P}(\mathrm{T_B} = 0) = 0$ de sorte que $\mathrm{T_B}(\Omega) = \mathbb{N}^*$. De plus, on a établi que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}(\mathrm{T_B} = k) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$$

Cela montre que $\mathrm{T_B}$ suit une loi géométrique de paramètre $1/4$. Ainsi, par le cours, la variable $\mathrm{T_B}$ admet une espérance donnée par $\mathrm{E}(\mathrm{T_B}) = 4$.