DEVOIR DE RÉVISION N°2

Problème 1 – Le théorème de Borel

Dans la partie **I**, on considère deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et on s'interroge sur l'existence d'un développement en série entière dans un voisinage de 0 pour ces fonctions. Dans la partie **II**, indépendante de la partie **I**, on démontre le théorème de Borel en construisant, pour toute suite réelle $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$, une fonction f indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}(0) = b_p$.

Partie I – Deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t(1-itx)}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note :

$$\Gamma_p = \int_0^{+\infty} t^p e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de Γ_p et déterminer une relation entre Γ_{p+1} et Γ_p.

3. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la valeur de Γ_p.

4. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}(x)$.

5. En déduire le rayon de convergence de la série entière suivante :

$$\sum_{p\geqslant 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p$$

La fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k(1-ikx)}$$

6. Montrer que g est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $g^{(p)}(x)$.

7. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $|g^{(p)}(0)| \geqslant p^{2p} e^{-p}$.

8. En déduire le rayon de convergence de la série entière suivante :

$$\sum_{p\geqslant 0} \frac{g^{(p)}(0)}{p!} x^p$$

La fonction g est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

Partie II – Le théorème de Borel

9. Déterminer deux nombres complexes a et b tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{x-i} + \frac{b}{x+i}$$

10. On considère la fonction Ψ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Psi(x) = \frac{1}{x-i}$$

Montrer par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}}$$

11. Déterminer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la dérivée $p-$ième de la fonction φ_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

12. Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}\right| \leqslant 2\left(1+x^2\right)^{\frac{p+1}{2}}$$

En déduire que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \left|\varphi_1^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{p!}{|x|^{p+1}}$$

13. Pour tout réel α, notons φ_α la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_\alpha(x) = \frac{1}{1+\alpha^2 x^2}$$

Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad |\alpha|\left|\varphi_\alpha^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{p!}{|x|^{p+1}}$$

On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on lui associe la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{a_n x^n}{1+n!a_n^2 x^2}$$

14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\alpha_n = \sqrt{n!}a_n$.
Montrer que, pour tout entier $p \geqslant 0$ et tout entier $n \geqslant p$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n^{(p)}(x) = a_n \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)$$

15. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout entier $p \in [\![0, n-1]\!]$, on a $u_n^{(p)}(0) = 0$ et déterminer $u_n^{(n)}(0)$.

16. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $p \in [\![0, n-1]\!]$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|u_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! 2^n$$

17. En déduire que la fonction U définie par :

$$\mathrm{U} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

est bien définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

18. Montrer que $\mathrm{U}(0) = a_0$ et que :

$$\forall p \geqslant 1, \quad \mathrm{U}^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p!a_p$$

19. Déduire de ce qui précède que, pour tout suite réelle $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$, il existe une fonction f indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}(0) = b_p$.

Ce résultat est appelé *théorème de Borel.* Il a été démontré par Peano et Borel à la fin du XIXe siècle.

Problème 2

On s'intéresse dans ce problème à l'application ϕ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \phi(P) = (X^2-1)P'' + 2XP'$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on introduit :

$$U_n = (X^2-1)^n \qquad \text{et} \qquad L_n = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}$$

Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre.* Pour $n \in \mathbb{N}$, on notera a_n le coefficient dominant de L_n.

Dans la suite, on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.

Partie I – Quelques résultats généraux

1. Déterminer L_0, L_1 et vérifier que $L_2 = \frac{1}{2}(3X^2-1)$.

Dans la suite de cette partie, n désigne un entier naturel.

2. Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de a_n.

3. Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de U_n, en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel $\alpha \in]-1,1[$ et un réel λ, que l'on ne cherchera pas à déterminer, tels que :

$$U_n' = \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha)$$

5. Dans cette question seulement, $n \geqslant 2$. On se donne $k \in [\![1, n-1]\!]$ et on suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel μ tels que :

$$U_n^{(k)} = \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k)$$

Justifier qu'il existe des réels $\beta_1, \dots, \beta_{k+1}$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel ν tels que :

$$U_n^{(k+1)} = \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1}).$$

6. En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, L_n admet n racines réelles simples, toutes dans $[-1,1]$.

On les note $x_1, \dots, x_n$ en convenant que $x_1 < \cdots < x_n$.

$$\text{On note } A_n = \prod_{k=1}^{n}(X - x_k)$$

En convenant que $A_0 = 1$, on a donc $L_n = a_n A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie II – Étude des éléments propres de l'endomorphisme ϕ

7. Prouver que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Dans les questions **8** à **13**, n désigne un entier naturel.

8. Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ.

On note ϕ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par ϕ, c'est-à-dire que $\phi_n(P) = \phi(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

9. On note $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
Montrer que M est triangulaire supérieure et que :

$$\forall k \in [\![0\,,n]\!], \quad m_{k,k} = k(k+1)$$

10. Montrer que ϕ_n est diagonalisable.
*On pourra utiliser la question **9**.*

11. Vérifier que :

$$\forall k \in [\![0\,,n]\!], \quad (\mathrm{X}^2-1)\mathrm{U}_k' - 2k\mathrm{X}\mathrm{U}_k = 0$$

12. Soit $k \in [\![0\,,n]\!]$. En dérivant $(k+1)$ fois la relation de la question **11**, montrer grâce à la formule de dérivation de Leibniz que :

$$(\mathrm{X}^2-1)\mathrm{U}_k^{(k+2)} + 2\mathrm{X}\mathrm{U}_k^{(k+1)} - k(k+1)\mathrm{U}_k^{(k)} = 0$$

13. Montrer que, pour $k \in [\![0\,,n]\!]$, le polynôme L_k est un vecteur propre de ϕ_n, en précisant la valeur propre associée.
*On pourra utiliser la question **12**.*

14. Déduire de ce qui précède les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de ϕ.

Dans la suite du problème, pour P et Q éléments de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on définit :

$$\langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t$$

Partie III – Distance au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$

15. Justifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

On note $\|\cdot\|$ la norme associée, qui est donc définie par :

$$\|f\| = \left(\int_{-1}^{1} f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

16. Établir que :

$$\forall (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]^2, \quad \langle \phi(\mathrm{P}),\mathrm{Q}\rangle = -\int_{-1}^{1} (t^2-1)\mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}'(t)\,\mathrm{d}t$$

puis que :

$$\forall (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]^2, \quad \langle \phi(\mathrm{P}),\mathrm{Q}\rangle = \langle \mathrm{P},\phi(\mathrm{Q})\rangle$$

17. Montrer que la famille $(\mathrm{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
*On pourra utiliser la question **14**.*

18. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}], \quad \langle \mathrm{P},\mathrm{L}_n\rangle = 0$$

19. On admet que :

$$\|\mathrm{L}_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\mathrm{Q}_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\mathrm{L}_n$$

Que peut-on dire de la famille $(\mathrm{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$?

Dans la suite de cette partie, P désigne un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$d(P, \mathbb{R}_n[X]) = \inf_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|P - Q\|$$

la distance de P au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

20. On fixe $n \in \mathbb{N}$. En utilisant un résultat du cours, justifier qu'il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$d(P, \mathbb{R}_n[X]) = \|P - T_n\|$$

puis justifier l'égalité :

$$d(P, \mathbb{R}_n[X])^2 = \|P\|^2 - \sum_{k=0}^{n} (c_k(P))^2 \qquad \text{où} \qquad c_k(P) = \langle P, Q_k \rangle$$

21. Prouver que la série $\sum_{k \geqslant 0} (c_k(P))^2$ converge et que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (c_k(P))^2 \leqslant \|P\|^2$$