RÉVISIONS DU PROGRAMME

Séance n°3 – Corrigé

S'entraîner sur les fondamentaux

Capacités révisées

→ **Exercice 1**

- Déterminer le rayon de convergence d'une série entière.
- Étudier la nature d'une série.
- Utiliser les théorèmes de régularité des limites ou sommes de suites ou séries de fonctions.

→ **Exercice 2**

- Manipuler la partie entière inférieure d'un nombre réel.
- Étudier la convergence d'une suite réelle.

→ **Exercice 3**

- Connaître les propriétés du polynôme caractéristique d'une matrice.
- Utiliser les critères de diagonalisabilité d'une matrice.

→ **Exercice 4**

- Manipuler le produit scalaire défini sur un espace euclidien.
- Utiliser les propriétés des endomorphismes symétriques dans un espace euclidien.

Approfondir ⋆

→ **Exercice 5**

Exercice 1 — *Séries entières – séries – suites et séries de fonctions*

Sous réserve de convergence, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.

Si $x = 1$, la suite $(1/\sqrt{n})_{n\geqslant 1}$ est bornée donc $\mathrm{R} \geqslant 1$. Si $x > 1$, on a $x^n/\sqrt{n}$ qui tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ par croissances comparées donc $\mathrm{R} \leqslant 1$. Finalement $\mathrm{R} = 1$.

2. Étudier la convergence de la série entière en -1 et 1.

Si $x = 1$, la série $\sum_{n\geqslant 1} 1/\sqrt{n}$ est une série de Riemann divergente puisque $1/2 \leqslant 1$. Si $x = -1$, la suite $((-1)^n/\sqrt{n})_{n\geqslant 1}$ est alternée et sa valeur absolue est clairement décroissante et tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Le théorème spécial des séries alternées assure donc la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n/\sqrt{n}$.

3. Établir la continuité de f en -1.

En tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} = 1$, f est continue (et même de classe $\mathscr{C}^\infty$) sur son intervalle ouvert de convergence, à savoir $]-1\,,1[$. Montrons que f est continue sur $[-1\,,0]$. On va utiliser le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions.

- Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction $x \mapsto x^n/\sqrt{n}$ est continue sur $[-1\,,0]$ puisque polynomiale.

- Soit $x \in [-1,0]$. La suite $(x^n/\sqrt{n})_{n\geqslant 1} = ((-1)^n|x|^n/\sqrt{n})_{n\geqslant 1}$ est alternée et sa valeur absolue est décroissante et tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Le théorème spécial des séries alternées assure la convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} x^n/\sqrt{n}$ sur $[-1,0]$ et donne la majoration suivante du reste :
$$\forall n \geqslant 1, \quad \forall x \in [-1,0], \quad |\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \frac{|x^{n+1}|}{\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$
Cette dernier quantité est indépendante de $x \in [-1,0]$ et tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui prouve la convergence uniforme de la suite des restes $(\mathrm{R}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers 0 sur $[-1,0]$ et donc la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} x^n/\sqrt{n}$ sur $[-1,0]$.

Le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions s'applique et donne la continuité de f sur $[-1,0]$ et donc en particulier en -1.

4. Déterminer la limite de f en 1.

Sur $[0,1[$, f est croissante en tant que somme de fonctions croissantes. Par le théorème de la limite monotone, soit elle admet une limite finie en 1, soit elle tend vers $+\infty$ en 1. Supposons qu'elle admette une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$. On fixe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in [0,1[$, on a :
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \geqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$
En passant à la limite quand x tend vers 1 dans l'inégalité, il vient :
$$\ell \geqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$
Puisque la série $\sum_{n\geqslant 1} 1/\sqrt{n}$ diverge et est à termes positifs, il vient que $\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} 1/\sqrt{n}$ tend vers $+\infty$ lorsque N tend vers $+\infty$. Ainsi, la minoration précédente étant vraie pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, on obtient que $\ell \geqslant +\infty$ en passant à la limite lorsque N tend vers $+\infty$. Ceci étant absurde, on conclut que $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$.

Exercice 2 — *Suites réelles*

On fixe $x \in \mathbb{R}$ et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivante en posant :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2}$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner un encadrement de u_n.

On fixe $a \in \mathbb{R}$. Par définition de la partie entière, on a $\lfloor a \rfloor \leqslant a < \lfloor a \rfloor + 1$, c'est-à-dire $a - 1 < \lfloor a \rfloor \leqslant a$. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, avec $a = kx$, cela donne $kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leqslant kx$. En sommant de k valant 1 à n cet encadrement, en utilisant l'expression de la somme des n premiers entiers et en divisant par n^2, il vient :
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{x}{2} - \frac{1}{n} < u_n \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{x}{2}$$

2. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

L'encadrement précédent étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le théorème d'encadrement assure que $\lim_{n\to+\infty} u_n = x/2$.

3. En déduire que tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.
On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $n^2 \in \mathbb{Z}^*$ de sorte que u_n est un nombre rationnel. Il en est donc de même de $2u_n$. Ainsi, avec la question précédente, la suite $(2u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de nombres rationnels qui converge vers $x \in \mathbb{R}$. On a donc bien prouvé que tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.

Exercice 3 — *Réduction*

Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels non tous nuls. On pose :
$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$
On considère alors la matrice $\mathrm{A} = \mathrm{C}\,{}^t\mathrm{C}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer le rang de A.

Après calcul, les colonnes de la matrice A sont $a_1\mathrm{C},\dots,a_n\mathrm{C}$ de sorte que toutes les colonnes sont proportionnelles à C. Les réels $a_1,\dots,a_n$ étant supposés non tous nuls, l'une au moins des colonnes de A est non nulle et on conclut donc que $\operatorname{rg} \mathrm{A} = 1$.

2. Calculer le polynôme caractéristique χ_{A} de A.

Par le théorème du rang, en notant E_0 l'espace propre associé à la valeur propre 0 pour la matrice A, on a $\dim(\mathrm{E}_0) = \dim(\operatorname{Ker}\mathrm{A}) = n-1$. Comme la multiplicité d'une valeur propre est toujours plus grande ou égale à la dimension du sous-espace propre associé, on a que la multiplicité de la valeur propre 0 dans χ_{A} est plus grande ou égale à $n-1$. Puisque χ_{A} est unitaire, on peut l'écrire sous la forme $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X}-a)$ avec $a \in \mathbb{R}$. Mais, en développant, cela donne $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n - a\mathrm{X}^{n-1}$ de sorte que le réel a est le coefficient du monôme X^{n-1} dans χ_{A} lequel vaut, d'après le cours, $\operatorname{Tr}\mathrm{A}$. On conclut après calcul que :

$$\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^{n-1}\left(\mathrm{X} - \sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$$

3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Notons $\lambda = \sum_{i=1}^n a_i^2$. On a $\lambda \neq 0$ d'après l'hypothèse faite sur les réels $a_1,\dots,a_n$. Ainsi, grâce à l'expression de χ_{A}, on a $\operatorname{sp}(\mathrm{A}) = \{0,\lambda\}$ avec λ de multiplicité 1, ce qui implique $\dim(\mathrm{E}_\lambda) = 1$. On conclut que la somme des dimensions des sous-espaces propres de A est $\dim(\mathrm{E}_0) + \dim(\mathrm{E}_\lambda) = (n-1)+1 = n$ et donc que A est diagonalisable.

Exercice 4 — *Espaces euclidiens – Réduction*

On se donne $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de colonnes notées $\mathrm{C}_1,\dots,\mathrm{C}_n$. On se permet dans la suite d'identifier $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on notera $(\cdot\,|\,\cdot)$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. En notant $(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ les coefficients de la matrice ${}^t\mathrm{AA}$, montrer que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad m_{i,j} = (\mathrm{C}_i\,|\,\mathrm{C}_j) = {}^t\mathrm{C}_i\mathrm{C}_j$$

On fixe $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Notons $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ les coefficients de la matrice A. Par définition du produit matriciel, puis grâce à celle du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$m_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{C}_i)_k(\mathrm{C}_j)_k = (\mathrm{C}_i\,|\,\mathrm{C}_j) = {}^t\mathrm{C}_i\mathrm{C}_j$$

la dernière égalité venant de l'expression matricielle du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

2. Prouver que $\operatorname{Ker}({}^t\mathrm{AA}) = \operatorname{Ker}(\mathrm{A})$ et en déduire que $\operatorname{rg}({}^t\mathrm{AA}) = \operatorname{rg}(\mathrm{A})$.

On prouve $\operatorname{Ker}({}^t\mathrm{AA}) = \operatorname{Ker}(\mathrm{A})$ par double inclusion :

- Soit $\mathrm{X} \in \operatorname{Ker}(\mathrm{A})$. Alors ${}^t\mathrm{AAX} = {}^t\mathrm{A}0 = 0$ de sorte que $\mathrm{X} \in \operatorname{Ker}({}^t\mathrm{AA})$. Ainsi $\operatorname{Ker}(\mathrm{A}) \subset \operatorname{Ker}({}^t\mathrm{AA})$.
- On se donne $\mathrm{X} \in \operatorname{Ker}({}^t\mathrm{AA})$. On a ${}^t\mathrm{AAX} = 0$. En multipliant à gauche par ${}^t\mathrm{X}$, il vient ${}^t\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{AAX} = 0$, c'est-à-dire ${}^t(\mathrm{AX})(\mathrm{AX}) = 0$. Par définition du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, cela s'écrit $(\mathrm{AX}\,|\,\mathrm{AX}) = 0$, ce qui donne $\mathrm{AX} = 0$ par séparation du produit scalaire. Ainsi $\mathrm{X} \in \operatorname{Ker}(\mathrm{A})$ et $\operatorname{Ker}({}^t\mathrm{AA}) \subset \operatorname{Ker}(\mathrm{A})$.

On a bien prouvé $\operatorname{Ker}({}^t\mathrm{AA}) = \operatorname{Ker}(\mathrm{A})$.
En utilisant le théorème du rang et la relation précédente, il vient :

$$\operatorname{rg}({}^t\mathrm{AA}) = n - \dim(\operatorname{Ker}({}^t\mathrm{AA})) = n - \dim(\operatorname{Ker}(\mathrm{A})) = \operatorname{rg}(\mathrm{A})$$

3. Montrer que ${}^t\mathrm{AA}$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont réelles positives.

La matrice ${}^t\mathrm{AA}$ est symétrique et réelle donc diagonalisable par le théorème spectral. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de ${}^t\mathrm{AA}$ et $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé. On a alors, en notant $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire canonique, que $\|\mathrm{AX}\|^2 = (\mathrm{AX}\,|\,\mathrm{AX}) = {}^t\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{AAX} = \lambda\,{}^t\mathrm{XX} = \lambda(\mathrm{X}\,|\,\mathrm{X}) = \lambda\|\mathrm{X}\|^2$. Par positivité de la norme on a $\|\mathrm{AX}\|^2 \geqslant 0$ et donc $\lambda\|\mathrm{X}\|^2 \geqslant 0$. Comme $\|\mathrm{X}\|^2$ est positif et non nul puisque $\mathrm{X} \neq 0$ en tant que vecteur propre, on obtient par division par $\|\mathrm{X}\|^2$ que $\lambda \geqslant 0$. Ainsi $\operatorname{sp}({}^t\mathrm{AA}) \subset \mathbb{R}_+$ comme souhaité.

Exercice 5 — *Analyse réelle de première année*

On se donne f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[0,1]$ et à valeurs réelles telle que $f(0)=0$. Déterminer, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=1}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right) f\left(\frac{p}{n^2}\right)$$

On commence par écrire, avec l'hypothèse $f(0)=0$ et le théorème fondamental de l'analyse :

$$\forall n\geqslant 1,\quad \forall p\in[\![1,n]\!],\quad f\left(\frac{p}{n^2}\right)=\int_0^{\frac{p}{n^2}} f'(u)\,\mathrm{d}u=\frac{p}{n^2}\int_0^1 f'\left(\frac{px}{n^2}\right)\mathrm{d}x$$

où la dernière égalité découle du changement de variable $x=(n^2u)/p$. Remarquons que, dans cette dernière intégrale, l'argument de f' est $0\leqslant (px)/n^2\leqslant 1/n$ pour $p\in[\![1,n]\!]$ et $x\in[0,1]$ de sorte que le terme $f'((px)/n^2)$ est proche de $f'(0)$ pour n grand par continuité de f' en 0. Formalisons ceci. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ ce qui en donne en particulier la continuité de f' en 0 :

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\eta>0,\quad |t|<\eta\quad\Longrightarrow\quad \left|f'(t)-f'(0)\right|<\varepsilon$$

Fixons $\varepsilon>0$. On se donne $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $1/n<\eta$ pour tout $n\geqslant n_0$. Cela assure que $|(px)/n^2|=(px)/n^2\leqslant 1/n<\eta$ pour $p\in[\![1,n]\!]$ et $x\in[0,1]$. Par inégalité triangulaire et grâce à la définition de la continuité de f' en 0, on obtient que :

$$\forall n\geqslant n_0,\quad \forall p\in[\![1,n]\!],\quad \left|\int_0^1 f'\left(\frac{px}{n^2}\right)\mathrm{d}x-f'(0)\right|=\left|\int_0^1\left(f'\left(\frac{px}{n^2}\right)-f'(0)\right)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1\left|f'\left(\frac{px}{n^2}\right)-f'(0)\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\varepsilon\,\mathrm{d}x=\varepsilon$$

On écrit alors :

$$\sum_{p=1}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right)f\left(\frac{p}{n^2}\right)=\sum_{p=1}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right)\frac{p}{n^2}\int_0^1 f'\left(\frac{px}{n^2}\right)\mathrm{d}x=\underbrace{\sum_{p=1}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right)\frac{p}{n^2}f'(0)}_{\mathrm{A}_n}+\underbrace{\sum_{p=1}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right)\frac{p}{n^2}\left(\int_0^1 f'\left(\frac{px}{n^2}\right)\mathrm{d}x-f'(0)\right)}_{\mathrm{B}_n}$$

La fonction $x\mapsto xf(x)$ étant continue sur $[0,1]$, le résultat de cours sur les sommes de Riemann donne :

$$\mathrm{A}_n=\sum_{p=1}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right)\frac{p}{n^2}f'(0)=\frac{f'(0)}{n}\sum_{p=1}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right)\frac{p}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}f'(0)\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$$

De plus, par inégalité triangulaire et grâce à ce qui précède, on peut écrire :

$$\forall n\geqslant n_0,\quad |\mathrm{B}_n|=\left|\sum_{p=1}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right)\frac{p}{n^2}\left(\int_0^1 f'\left(\frac{px}{n^2}\right)\mathrm{d}x-f'(0)\right)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{n}\sum_{p=1}^{n}\left|f\left(\frac{p}{n}\right)\right|\frac{p}{n}=\varepsilon\times\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\left|f\left(\frac{p}{n}\right)\right|\frac{p}{n}}_{\mathrm{C}_n}$$

La fonction $x\mapsto x|f(x)|$ étant continue sur $[0,1]$, le résultat de cours sur les sommes de Riemann donne :

$$\mathrm{C}_n=\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\left|f\left(\frac{p}{n}\right)\right|\frac{p}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1 x|f(x)|\,\mathrm{d}x$$

de sorte que la suite $(\mathrm{C}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, disons par une constante $\mathrm{C}\in\mathbb{R}$. Cela donne, avec ce qui précède, la majoration $|\mathrm{B}_n|\leqslant\mathrm{C}\varepsilon$ pour tout $n\geqslant n_0$. Ceci valant pour tout $\varepsilon>0$, on obtient $\mathrm{B}_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.
En conclusion :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=1}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right)f\left(\frac{p}{n^2}\right)=f'(0)\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$$