ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Plan du cours

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

I. Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1

Définition 1 – *Équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1*

Une *équation différentielle linéaire du premier ordre* sous forme résolue est une équation de la forme :

$$y' + a(t)y = f(t) \tag{E}$$

où $y : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ est une fonction inconnue que l'on souhaite déterminer et $a : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues sur I.

- Une *solution de* (E) est une fonction $y : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ dérivable sur I vérifiant la relation (E).
- La fonction f est appelée le *second membre* de l'équation différentielle (E). Si la fonction f est nulle, on dit que l'équation différentielle (E) est *homogène*.
- On appelle *équation différentielle homogène associée à* (E) l'équation :

$$y' + a(t)y = 0 \tag{E$_0$}$$

Remarque Le fait que l'équation (E) soit résolue signifie que le coefficient de y' est 1. Si jamais l'équation que l'on souhaite résoudre est non résolue, c'est-à-dire de la forme $by' + a(t)y = f(t)$ avec b une fonction continue, on divise par la fonction b et on résout l'équation différentielle résolue $y' + a/by = f/b$. On prendra garde d'étudier les points où la fonction b s'annule et donc de résoudre cette nouvelle équation différentielle résolue là où c'est possible.

Dans la suite de cette partie, on considère l'équation différentielle $y' + a(t)y = f(t)$ (E) et son équation différentielle homogène associée $y' + a(t)y = 0$ (E$_0$). On note respectivement $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de (E) et (E$_0$).

I. 1. Structure des solutions

Proposition 1 – *Structure de l'ensemble des solutions*

- L'ensemble $\mathscr{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K})$.
- Si y_P est une solution particulière de (E) alors on a :

$$\mathscr{S} = \{y_P + y_0,\ y_0 \in \mathscr{S}_0\}$$

Proposition 2 – *Principe de superposition*

Soient y_1 et y_2 respectivement solutions des équations différentielles :

$$y' + a(t)y' = f_1(t) \qquad \text{et} \qquad y' + a(t)y = f_2(t)$$

Alors la fonction $y_1 + y_2$ est solution de l'équation différentielle :

$$y' + a(t)y = f_1(t) + f_2(t)$$

I. 2. Résolution

Proposition 3 – *Solutions de l'équation homogène*

Les solutions de l'équation homogène (E_0) sont les fonctions de la forme :

$$y : \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \mathrm{C}e^{-\mathrm{A}(t)} \end{array}$$

où $\mathrm{C} \in \mathbb{K}$ et A est une primitive de a sur I.

Méthode – *Résolution d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1*

On cherche à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' + a(t)y = f(t) \tag{E}$$

On s'appuie sur la connaissance de la structure de l'ensemble des solutions donnée par la **Proposition 1** :

(1) On résout l'équation homogène associée $y' + a(t)y = 0$ (E_0) pour obtenir $\mathscr{S}_0$ grâce à la **Proposition 2** ;

(2) On détermine une solution particulière y_P de (E) :

- On commence par chercher une solution évidente ;
- Lorsque cela n'aboutit pas, on passe à la méthode systématique de la *variation de la constante*. Les solutions de l'équation homogène étant de la forme $t \in \mathrm{I} \mapsto \mathrm{C}e^{-\mathrm{A}(t)}$ où C est une constante, on fait *varier la constante* en cherchant une solution particulière y_P de la forme :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad y_P(t) = \mathrm{C}(t)e^{-\mathrm{A}(t)}$$

où $\mathrm{C} : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ est une *fonction* à déterminer. On trouve l'expression de C en exprimant le fait que y_P doit être solution de (E).

Remarque Dans le cas où le second membre s'exprime sous la forme d'une somme, on peut tirer profit du principe de superposition.

(3) On conclut en écrivant que $\mathscr{S} = \{y_P + y_0,\ y_0 \in \mathscr{S}_0\}$.

Exemple 1

Résoudre l'équation différentielle résolue suivante sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ et avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$$y' - ty = te^{t^2} \tag{E}$$

I. 3. Problème de Cauchy

Proposition 4 – *Résolution du problème de Cauchy*

Pour toute condition initiale $(t_0, y_0) \in \mathrm{I} \times \mathbb{K}$, le problème de Cauchy (P) suivant :

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} y' + a(t)y = f(t) & (\mathrm{E}) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

Exemple 2

Résoudre le problème de Cauchy suivant sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ et avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} y' - ty = te^{t^2} & (\mathrm{E}) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

I. 4. Résolution de systèmes différentiels linéaires d'ordre 1

On présente dans cette partie, sous la forme d'un exercice typique, une technique de résolution de systèmes différentiels linéaires d'ordre 1. Le cas étudié ci-après est homogène et à coefficients constants, mais la technique peut s'adapter si un second membre est présent ou si les coefficients ne sont pas constants.

Exercice 3

Déterminer toutes les fonctions x et y dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} x' &= 4x - 2y \\ y' &= 3x - y \end{cases}$$

II. Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

Définition 2 – *Équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2*

Une *équation différentielle linéaire du second ordre* sous forme résolue est une équation de la forme :

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t) \tag{E}$$

où $y : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ est une fonction inconnue que l'on souhaite déterminer et $a : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$, $b : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ trois fonctions continues sur I.

- Une *solution de* (E) est une fonction $y : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable sur I vérifiant la relation (E).
- La fonction f est appelée le *second membre* de l'équation différentielle (E). Si la fonction f est nulle, on dit que l'équation différentielle (E) est *homogène*.
- On appelle *équation différentielle homogène associée à* (E) l'équation :

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \tag{E_0}$$

Remarque Le fait que l'équation (E) soit résolue signifie que le coefficient de y'' est 1. Si jamais l'équation que l'on souhaite résoudre est non résolue, on se ramène par division à une équation résolue.

Dans la suite de cette partie, on considère l'équation différentielle $y''+a(t)y'+b(t)y=f(t)$ (E) et son équation différentielle homogène associée $y''+a(t)y'+b(t)y=0$ (E_0). On note respectivement $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de (E) et (E_0).

II. 1. Structure des solutions et problème de Cauchy

Proposition 5 – *Structure de l'ensemble des solutions*

- L'ensemble $\mathscr{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^2(\mathrm{I},\mathbb{K})$.
- Si y_P est une solution particulière de (E) alors on a :

$$\mathscr{S}=\{y_P+y_0,\ y_0\in\mathscr{S}_0\}$$

Méthode – *Résolution d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2*

La méthode de résolution d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre deux reste la même :

(1) On résout l'équation homogène associée (E_0) pour déterminer $\mathscr{S}_0$;

(2) On détermine une solution particulière y_P de (E) ;

(3) On conclut en écrivant que $\mathscr{S}=\{y_P+y_0,\ y_0\in\mathscr{S}_0\}$.

Proposition 6 – *Principe de superposition*

Soient y_1 et y_2 respectivement solutions des équations différentielles :

$$y''+a(t)y'+b(t)y=f_1(t)\qquad\text{et}\qquad y''+a(t)y'+b(t)y=f_2(t)$$

Alors la fonction y_1+y_2 est solution de l'équation différentielle :

$$y''+a(t)y'+b(t)y=f_1(t)+f_2(t)$$

Théorème 1 – *Théorème de Cauchy linéaire*

Pour toute condition initiale $(t_0,v_0,v_1)\in\mathrm{I}\times\mathbb{K}\times\mathbb{K}$, le problème de Cauchy (P) suivant :

$$(\mathrm{P})\quad\left\{\begin{array}{l} y''+a(t)y'+b(t)y=f(t)\quad(\mathrm{E})\\ y(t_0)=v_0\\ y'(t_0)=v_1\end{array}\right.$$

admet une unique solution.

Théorème 2 – *Dimension de $\mathscr{S}_0$*

Pour $t_0\in\mathrm{I}$, l'application suivante :

$$\varphi_{t_0}:\begin{array}{ccc}\mathscr{S}_0 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2\\ y & \longmapsto & (y(t_0),y'(t_0))\end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier, $\dim(\mathscr{S}_0)=2$.

Remarque La connaissance de la dimension de $\mathscr{S}_0$ peut se révéler très utile d'un point de vue pratique : pour décrire $\mathscr{S}_0$, il suffit de trouver deux fonctions f_1 et f_2 de $\mathscr{S}_0$ non colinéaires pour affirmer que (f_1,f_2) forme une base de $\mathscr{S}_0$. Effet, cette famille est alors libre et de cardinal $2=\dim(\mathscr{S}_0)$.

Exemple 4

Résoudre l'équation différentielle homogène suivante sur $I =]0, +\infty[$ et avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$$t^2 y'' + t y' - y = 0 \qquad \text{(E)}$$

On cherchera des fonctions solutions de la forme $t \mapsto t^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Méthode – *Détermination d'une solution développable en série entière*

On considère une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre deux (E) dont on cherche une solution. Une idée peut être de chercher des solutions de (E) développables en série entière. Pour ce faire, on procède par analyse-synthèse.

(1) Pour l'analyse, on suppose que y est une solution de (E) développable en série entière avec un rayon de convergence $R > 0$. On pose par exemple :

$$\forall t \in]-R, R[, \quad y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

Le cours assure que la somme y de cette série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert $]-R, R[$ de convergence et que les dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme :

$$\forall t \in]-R, R[, \quad y'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} t^n$$

$$y''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n$$

On reporte ces expressions de y, y' et y'' dans l'équation différentielle (E) et on détermine, grâce à l'unicité du développement en série entière, une relation entre les coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$; on trouve alors l'expression de ces derniers.

(2) Réciproquement, on fait la synthèse, on définit une fonction somme d'une série entière grâce à l'expression des coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trouvée dans l'analyse. On vérifie que le rayon de convergence de cette série entière est strictement positif et que la fonction somme est bien solution de l'équation différentielle (E).

Remarques

- Cette méthode peut s'appliquer sur une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 non résolue.
- Elle est particulièrement adaptée lorsque les coefficients de y'', y' et y sont polynomiaux.

Exemple 5

Trouver les solutions développables en série entière de l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 :

$$t y'' + 2y' + t y = 0 \qquad \text{(E)}$$

II. 2. Équations à coefficients constants

Dans cette sous-partie, on suppose que les fonctions $a : I \to \mathbb{K}$ et $b : I \to \mathbb{K}$ sont constantes. On les identifie alors à deux constantes a et b dans $\mathbb{K}$. On étudie donc l'équation différentielle $y'' + ay' + by = f(t)$ (E) et son équation différentielle homogène associée $y'' + ay' + by = 0$ (E_0). On note toujours respectivement $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de (E) et (E_0).

Remarque – *Équation caractéristique*

On rappelle que l'on associe à l'équation différentielle homogène (E_0) son équation caractéristique (R) donnée par : $r^2 + ar + b = 0$.

Le résultat suivant rappelle comment résoudre une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants.

PROPOSITION 7 – *Solutions de l'équation homogène*

On note (R) l'équation caractéristique associée à (E_0).

On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

- Si (R) a deux solutions distinctes λ_1 et λ_2 alors toute solution y de (E_0) s'écrit :

$$\forall t \in I, \quad y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$$

- Si (R) a une solution double λ alors toute solution y de (E_0) s'écrit :

$$\forall t \in I, \quad y(t) = e^{\lambda t}(C_1 + C_2 t), \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$$

On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

- Si (R) a deux solutions réelles distinctes λ_1 et λ_2 alors toute solution y de (E_0) s'écrit :

$$\forall t \in I, \quad y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

- Si (R) a une solution réelle double λ alors toute solution y de (E_0) s'écrit :

$$\forall t \in I, \quad y(t) = e^{\lambda t}(C_1 + C_2 t), \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

- Si (R) a deux solutions complexes et conjuguées $\alpha \pm i\beta$ alors toute solution y de (E_0) s'écrit :

$$\forall t \in I, \quad y(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)), \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

PROPOSITION 8 – *Recherche d'une solution particulière pour un second membre exponentiel*

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $K \in \mathbb{K}$. On suppose que (E) s'écrit :

$$y'' + ay' + by = Ke^{\lambda t}$$

Alors (E) possède une solution particulière de la forme :

- $t \mapsto Ce^{\lambda t}$ avec $C \in \mathbb{K}$ si λ n'est pas solution de l'équation caractéristique.
- $t \mapsto Cte^{\lambda t}$ avec $C \in \mathbb{K}$ si λ est racine simple de l'équation caractéristique.
- $t \mapsto Ct^2 e^{\lambda t}$ avec $C \in \mathbb{K}$ si λ est racine double de l'équation caractéristique.

REMARQUES

- Grâce aux formules d'Euler et par principe de superposition, on sait donc trouver une solution particulière lorsque le second membre est de la forme $t \mapsto A\cos(\omega t)$ ou $t \mapsto A\sin(\omega t)$.
- Lorsque le second membre est constant, on cherche une solution particulière constante. Lorsqu'il est polynomial, on cherche une solution particulière polynomiale dont on cherchera par avance le degré.
  De façon plus générale, on essaie assez souvent de chercher une solution particulière de la même forme que le second membre.

EXEMPLE 6

Résoudre l'équation différentielle suivante sur $I = \mathbb{R}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} = \mathbb{C}$.

$$y'' - 2y' + 2y = t^2 + 4 \tag{E}$$