ESPACES PROBABILISÉS

Plan du cours

I. Ensemble dénombrables

Définition 1 – *Ensemble dénombrable*

Un ensemble est dit *dénombrable* s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$, c'est-à-dire s'il existe une bijection entre cet ensemble et $\mathbb{N}$.

Exemple 1

Prouver que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ sont des ensembles dénombrables.

Remarques

- Par définition, un ensemble dénombrable est donc infini. En revanche, la réciproque est fausse puisqu'il existe des ensembles infinis non dénombrables.
- De façon plus concrète, un ensemble dénombrable E est un ensemble dont on peut énumérer les éléments de façon exhaustive à l'aide des entiers naturels de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire que l'on peut écrire $E = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ où les $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux distincts. En effet, si $\varphi : \mathbb{N} \to E$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur E alors $E = \{\varphi(n),\ n \in \mathbb{N}\}$ par surjectivité de φ et les $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont distincts deux à deux par injectivité de φ.

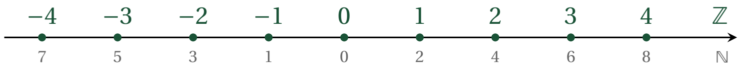
Définition 2 – *Ensemble au plus dénombrable*

Un ensemble est dit *au plus dénombrable* s'il est fini ou dénombrable.

PROPOSITION 1 – *$\mathbb{Z}$ est dénombrable*

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

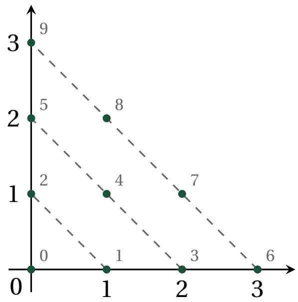
REMARQUE On peut visualiser la situation sur l'axe réel :



PROPOSITION 2 – *$\mathbb{N}^2$ est dénombrable*

L'ensemble $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

REMARQUE Encore une fois, visuellement, on observe qu'il est possible d'énumérer les couples de $\mathbb{N}^2$ à l'aide de $\mathbb{N}$:



EXEMPLE – *Des ensembles infinis non dénombrables*

La droite réelle $\mathbb{R}$ n'est pas un ensemble dénombrable : l'infinité des éléments de $\mathbb{R}$ est « trop grande » pour que l'on puisse énumérer tous les réels à l'aide de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.
Il en est de même du segment $[0,1]$ ou plus généralement de tout intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$.

II. ESPACES PROBABILISÉS

Le but principal du programme de deuxième année en matière de probabilités est de pouvoir considérer des univers Ω d'expériences aléatoires *infinis*, ce qui permet de s'intéresser à des cas plus riches. Cette généralisation va néanmoins nécessiter quelques adaptations.

EXEMPLE On peut s'intéresser à une suite infinie de lancers d'une pièce de monnaie. L'univers Ω associé à cette expérience, c'est-à-dire l'ensemble des résultats possibles, est tout naturellement $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}^*}$, l'ensemble des suites indexées par $\mathbb{N}^*$ et à valeurs dans $\{P, F\}$; il est infini (non dénombrable). Cette expérience n'est pas artificielle, elle permet par exemple de s'intéresser au nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir le premier *Pile* ; en particulier, on peut s'intéresser à la probabilité de ne jamais obtenir de *Pile*.

II. 1. TRIBU

DÉFINITION 3 – *Tribu*

Soit Ω un ensemble. Une *tribu* sur Ω est une partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ vérifiant :

(1) $\Omega \in \mathscr{A}$;

(2) Pour tout $A \in \mathscr{A}$, on a $\Omega \backslash A = \overline{A} \in \mathscr{A}$;

(3) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$, on a $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$.

Remarques

- Autrement dit, une tribu est une partie de $\mathscr{P}(\Omega)$ contenant Ω et stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable.
- Une tribu peut aussi être appelée une $\sigma-$*algèbre*, d'où la notation $\mathscr{A}$ choisie.
- L'intérêt de cette nouvelle définition sera mise en valeur lorsque la notion de probabilité sera abordée.

Vocabulaire

- Lorsqu'un ensemble Ω est muni d'une tribu $\mathscr{A}$, le couple $(\Omega, \mathscr{A})$ est appelé *espace probabilisable*. L'ensemble Ω est appelé *univers* et les éléments de la tribu $\mathscr{A}$ sont appelés les *événements*.
- Si $A \in \mathscr{A}$ est un événement, $\overline{A} \in \mathscr{A}$ est l'*événement contraire* de A.
- Deux événements A et B de $\mathscr{A}$ sont dits *incompatibles* s'ils sont disjoints, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$.

Exemples 2

Soit Ω un ensemble. Montrer que les ensembles $\mathscr{A}$ suivants sont des tribus sur Ω :

(1) $\mathscr{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ (*tribu grossière*).

(2) $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ (*tribu complète*).

(3) Si $A \subset \Omega$, $\mathscr{A} = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$.
Prouver que c'est la plus petite (au sens de l'inclusion) tribu sur Ω contenant A.

Proposition 3 – *Propriétés de stabilité d'une tribu*

Soient Ω un ensemble et $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω. Alors :

- **Appartenance de l'ensemble vide :** $\emptyset \in \mathscr{A}$
- **Stabilité par intersection dénombrable :** Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathscr{A}$, on a :
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$$
- **Stabilité par réunion et intersection finies :** Pour tous événements $A_1, \dots, A_n$ de $\mathscr{A}$, on a :
$$A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathscr{A} \qquad \text{et} \qquad A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathscr{A}$$
- **Stabilité par différence :** Pour tous événements A et B de $\mathscr{A}$, on a $B \backslash A \in \mathscr{A}$.

II. 2. Probabilité

Définition 4 – *Probabilité*

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.
On appelle *probabilité* sur $(\Omega, \mathscr{A})$ toute application $P : \mathscr{A} \to [0,1]$ telle que :

(1) $P(\Omega) = 1$;

(2) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$ deux à deux incompatibles, la série $\sum P(A_n)$ converge et :
$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$
($\sigma-$*additivité* ou *additivité dénombrable*)

Le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est alors appelé *espace probabilisé*.

Remarques

- Cette définition prolonge bien celle donnée en première année.
- La série $\sum P(A_n)$ dépend *a priori* de l'ordre dans lequel ont été énumérés les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{A}$. En fait, de façon plus générale, si une série $\sum_{i\in I} a_i$ est absolument convergente (on dit que la famille $(a_i)_{i\in I}$ est *sommable*), l'ordre dans lequel on effectue la sommation n'a d'influence ni sur la nature de la série ni sur la valeur de la somme en cas de convergence. Pour la série $\sum P(A_n)$, étant donné qu'elle converge et qu'elle est à termes positifs, la valeur de sa somme est donc bien indépendante de l'ordre de sommation choisi.
- En première année, l'ensemble Ω étant fini, l'ensemble des événements était toujours pris égal à $\mathscr{P}(\Omega)$. Dans le cadre plus général de deuxième année où l'ensemble Ω peut être infini, on ne peut plus prendre systématiquement $\mathscr{P}(\Omega)$ comme ensemble des événements. Le soucis réside dans le fait qu'il n'est pas toujours possible de définir une application P de $\mathscr{P}(\Omega)$ tout entier dans $[0,1]$ vérifiant les propriétés précédentes. Pour contourner ce problème, on s'autorise à définir P sur un sous-ensemble $\mathscr{A}$ plus petit que $\mathscr{P}(\Omega)$ ayant néanmoins les bonnes propriétés d'une tribu énoncées plus haut.

  Dans la suite, on précisera rarement la tribu $\mathscr{A}$ apposée sur l'ensemble Ω, on partira du principe que tous les événements considérés sont toujours bien dans la tribu $\mathscr{A}$.

Vocabulaire

Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, on se donne $A \in \mathscr{A}$ un événement.

- Si $P(A) = 1$, on dit que l'événement A est *presque sûr* ou *presque certain*.
- Si $P(A) = 0$, on dit que l'événement A est *négligeable* ou *presque impossible*.

Exemple 3

On lance une infinité de fois une pièce équilibrée. Pour $n \geqslant 1$, on introduit les événements B_n : « Le premier *Pile* apparaît au n−ème lancer ». Calculer la probabilité des événements $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et en déduire la probabilité d'obtenir au moins un *Pile* durant les lancers.

Proposition 4 – *Propriétés du calcul des probabilités*

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. On a les propriétés suivantes :

- **Probabilité de l'ensemble vide :** $P(\emptyset) = 0$.
- **σ−additivité finie :** Pour tous événements $A_1, \dots, A_n$ de $\mathscr{A}$ deux à deux incompatibles, on a :

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n)$$

- **Probabilité de la différence :** Pour tous événements A et B de $\mathscr{A}$ vérifiant $A \subset B$, on a :

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$$

- **Croissance :** Pour tous événements A et B de $\mathscr{A}$ vérifiant $A \subset B$, on a : $P(A) \leqslant P(B)$.
- **Probabilité de l'événement contraire :** Pour tout événement A de $\mathscr{A}$, on a : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- **Probabilité de l'union de deux événements :** Pour tous événements A et B de $\mathscr{A}$, on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Proposition 5 – *Continuité monotone*

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. On a les propriétés suivantes :

- **Continuité croissante :** Pour toute suite croissante d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{A}$, c'est-à-dire pour toute suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$$

- **Continuité décroissante :** Pour toute suite décroissante d'événements $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{A}$, c'est-à-dire pour toute suite d'événements $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\mathrm{A}_{n+1} \subset \mathrm{A}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$$

Exemple 4

On lance une infinité de fois une pièce équilibrée et on considère les événements A : « On obtient au moins un *Pile* durant les lancers » et B : « On obtient une infinité de *Pile* durant les lancers ».
Calculer les probabilités de A et B.

Proposition 6 – *Sous-additivité*

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé.

- **Cas fini :** Pour tous événements $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ de $\mathscr{A}$, on a :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{A}_n) \leqslant \mathrm{P}(\mathrm{A}_1) + \cdots + \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$$

- **Cas dénombrable :** Pour toute suite d'événements $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{A}$ telle que $\sum \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$ converge, on a :

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$$

II. 3. Probabilités sur un univers au plus dénombrable

Dans cette sous-partie, on se place dans le cas où Ω est au plus dénombrable. On le munit généralement dans ce cas de la tribu complète $\mathscr{P}(\Omega)$.

Dans ce contexte, une probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ est entièrement déterminée par son comportement sur les événements dits *élémentaires*, c'est-à-dire les singletons. En effet, si A est une partie de Ω, on peut écrire A sous la forme d'une réunion au plus dénombrable d'événements élémentaires deux à deux incompatibles :

$$\mathrm{A} = \bigcup_{a\in\mathrm{A}} \{a\}$$

de sorte que la propriété de $\sigma-$additivité de P implique :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \sum_{a\in\mathrm{A}} \mathrm{P}(\{a\})$$

Proposition 7 – *Construction d'une probabilité dans le cas Ω au plus dénombrable*

Soit Ω un ensemble au plus dénombrable.

- **Cas où Ω est fini :** On écrit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, w_\mathrm{N}\}$ avec $\mathrm{N} = \mathrm{Card}(\Omega)$.
Si $(p_1, \ldots, p_\mathrm{N})$ est une famille de N réels positifs vérifiant la relation $\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} p_n = 1$, alors il existe une unique probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ telle que :

$$\forall n \in [\![1, \mathrm{N}]\!], \quad \mathrm{P}(\{\omega_n\}) = p_n$$

- **Cas où Ω est dénombrable :** On écrit $\Omega = \{\omega_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.
Si $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs vérifiant la relation $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, alors il existe une unique probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(\{\omega_n\}) = p_n$$

Exemple 5

Montrer que l'on peut définir une unique probabilité P sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ telle que $P(\{n\}) = 1/2^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer la probabilité de l'événement formé des nombres pairs non divisibles par 3.

III. Conditionnement

III. 1. Probabilité conditionnelle

Définition 5 – *Probabilité conditionnelle de* A *sachant* B

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et A et B deux événements de $\mathscr{A}$ tels que $P(B) \neq 0$.
On appelle *probabilité conditionnelle de* A *sachant* B et l'on note $P_B(A)$ le réel :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Notation La probabilité conditionnelle de A sachant B peut également être notée $P(A|B)$.

Remarque La probabilité conditionnelle de A sachant B « porte bien son nom », c'est-à-dire qu'elle correspond à la probabilité que l'événement A se réalise en prenant pour hypothèse que l'événement B est réalisé. Cela revient à considérer que l'univers n'est plus Ω mais $\Omega \cap B$.

Proposition 8 – *Probabilité conditionnelle*

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et B un événement de $\mathscr{A}$ tel que $P(B) \neq 0$.

L'application
$$\begin{array}{rccl} P_B : & \mathscr{A} & \longrightarrow & [0,1] \\ & A & \longmapsto & P_B(A) \end{array}$$

est un probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$. On l'appelle la *probabilité conditionnelle à l'événement* B.

Remarque La probabilité P_B vérifie toutes les propriétés de calcul des probabilités énoncées précédemment.

Théorème 1 – *Formule de Bayes*

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et A et B deux événements de $\mathscr{A}$ tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors :

$$P_B(A) = P_A(B)\frac{P(A)}{P(B)}$$

Remarque La formule de Bayes permet d'« inverser » un conditionnement, c'est-à-dire de passer de $P_B(A)$ à $P_A(B)$.

III. 2. Formule des probabilités composées

Théorème 2 – *Formule des probabilités composées*

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et, pour $n \geqslant 2$, $A_1, \ldots, A_n$ des événements de $\mathscr{A}$ vérifiant la condition $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors on a :

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2)\, P_{A_1 \cap A_2}(A_3)\, \cdots\, P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Remarque L'hypothèse $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$ assure l'existence de toutes les probabilités conditionnelles de la formule des probabilités composées. En effet, pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a $A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1} \subset A_1 \cap \cdots \cap A_i$ de sorte que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_i) \geqslant P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$ et donc $P(A_1 \cap \cdots \cap A_i) \neq 0$.

Exemple 6

On considère une urne contenant n boules rouges et n boules vertes. On effectue dans cette urne n tirages sans remise. Donner la probabilité de n'obtenir que des boules vertes.

III. 3. Formule des probabilités totales

Définition 6 – *Système complet d'événements*

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. On appelle *système complet d'événements* toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathscr{A}$ deux à deux incompatibles dont la réunion vaut Ω, c'est-à-dire que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2 \text{ avec } i \neq j, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$$

Remarque Autrement, une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements est un système complet d'événements si elle forme une partition de l'univers Ω.

Exemples 7

(1) Sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$, on se donne $A \in \mathscr{A}$ est un événement.
Montrer que $\{A, \overline{A}\}$ est un système complet d'événements.

(2) On reprend le cadre d'une suite infinie de lancers d'une pièce. On pose A_0 : « On n'obtient aucun *Pile* » et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, A_n : « On obtient le premier *Pile* au n−ème lancer.
Montrer que la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

Théorème 3 – *Formule des probabilités totales*

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements.
Alors, pour tout événement $B \in \mathscr{A}$, la série $\sum P(B \cap A_n)$ converge et :

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{A_n}(B) P(A_n)$$

Remarque La seconde égalité est appelée la *forme conditionnelle* de la formule des probabilités totales. À noter que l'on convient que $P_{A_n}(B)P(A_n) = 0$ dès que $P(A_n) = 0$, ce qui cohérent puisque dans ce cas $P(A_n \cap B) = 0$. En effet, étant donné que $B \cap A_n \subset A_n$, il vient $0 \leqslant P(B \cap A_n) \leqslant P(A_n) = 0$ par croissance et positivité de la probabilité.

Exemple 8

On considère des urnes U_n pour $n \geqslant 1$. Pour chaque $n \geqslant 1$, l'urne U_n contient n boules dont une seule est blanche. Un joueur choisit une urne au hasard, l'urne n étant choisie avec probabilité $1/2^n$, puis tire une boule dans cette urne. Donner la probabilité que le joueur tire une boule blanche.

IV. Indépendance

Définition 7 – *Événements indépendants*

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et A, B deux événements de $\mathscr{A}$.
Les événements A et B sont dits *indépendants* si :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Proposition 9 – *Caractérisation par les probabilités conditionnelles*

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et A, B deux événements de $\mathscr{A}$ tels que $P(B) \neq 0$.
Les événements A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$.

Définition 8 – *Événements mutuellement indépendants, cas fini*

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et $A_1, \dots, A_n$ des événements de $\mathscr{A}$.
Les événements $A_1, \dots, A_n$ sont dits *mutuellement indépendants* si pour toute partie non vide $I \subset [\![1, n]\!]$:

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

Remarques

- Lorsqu'il n'y pas d'ambiguïté, on se contentera souvent de dire que les événements sont indépendants et non *mutuellement* indépendants.
- La seule relation $P(\cap_{i=1}^n A_i) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$ ne permet pas de conclure que les événements $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants, il faut le vérifier pour toute partie non vide I de $[\![1, n]\!]$.
- Si des événements $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants, ils sont deux à deux indépendants mais la réciproque est fausse.

Exemple 9

Sur une suite de deux lancers d'une pièce équilibrée, on introduit les événements A : « Le premier lancer donne *Pile* », B : « Le second lancer donne *Pile* » et C : « Les deux lancers donnent le même résultat ».
Prouver que ces événements sont indépendants deux à deux mais pas mutuellement.

Définition 9 – *Événements mutuellement indépendants, cas dénombrable*

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathscr{A}$.
Les événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dits *mutuellement indépendants* si pour toute partie finie non vide $I \subset \mathbb{N}$ les événements $(A_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendants.

Remarque En pratique, il est assez rare de devoir vérifier que des événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants. Ce sont plutôt les conditions de réalisation de l'expérience aléatoire étudiée qui donnent l'indépendance.

Exemple 10

On étudie une suite infinie de lancers d'une pièce. Pour $n \geqslant 1$, on introduit les événements P_n : « Le n−ème lancer donne *Pile* ». Justifier que les événements $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendants.