VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Plan du cours

Dans la suite, $(\Omega, \mathscr{A})$ désigne un espace probabilisable, P une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$ et E un ensemble.

I. Variables aléatoires discrètes

I. 1. Généralités

Définition 1 – *Variable aléatoire discrète*

Soit $X : \Omega \to E$ une application. On dit que X est une *variable aléatoire discrète* sur $(\Omega, \mathscr{A})$ si :

(1) L'image $X(\Omega)$ de X est une partie finie ou dénombrable de E ;

(2) Pour tout élément $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathscr{A}$.

Lorsque $E = \mathbb{R}$, on dit que X est une variable aléatoire discrète *réelle*.

Remarque On considère une expérience aléatoire et on note Ω l'ensemble de ses résultats possibles. Une variable aléatoire sur Ω permet d'obtenir des renseignements sur l'expérience aléatoire en associant à chaque réalisation $\omega \in \Omega$ de l'expérience le renseignement $X(\omega) \in E$.

Proposition 1 – *Reformulation de la définition*

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.
Pour tout $A \subset E$, on a $X^{-1}(A) \in \mathscr{A}$.

Remarque Si $X : \Omega \to E$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$, les sous-ensembles $X^{-1}(\{x\})$ pour $x \in X(\Omega)$ ou $X^{-1}(A)$ pour $A \subset E$ sont donc des éléments de la tribu $\mathscr{A}$, c'est-à-dire des événements. En particulier, il est donc possible de calculer leur probabilité.

Notations

- Si $x \in X(\Omega)$, on note plutôt $(X = x)$ ou $\{X = x\}$ l'événement $X^{-1}(\{x\})$.
- De même, si $A \subset E$, on note plutôt $(X \in A)$ ou $\{X \in A\}$ l'événement $X^{-1}(A)$.
- En particulier, si $E = \mathbb{R}$, on utilisera par exemple les notations $(a \leqslant X \leqslant b)$ ou $\{a \leqslant X \leqslant b\}$ et $(X \geqslant a)$ ou $\{X \geqslant a\}$ pour désigner les événements $X^{-1}([a, b])$ et $X^{-1}([a, +\infty[)$.

I. 2. Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition 2 – *Loi d'une variable aléatoire discrète*

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. L'application P_X définie sur $\mathscr{P}(X(\Omega))$ par :

$$\forall A \subset X(\Omega), \quad P_X(A) = P(X \in A)$$

est une probabilité sur $(X(\Omega), \mathscr{P}(X(\Omega)))$ appelée *loi de X*.

Remarques

- Puisque $X(\Omega)$ est au plus dénombrable, la loi P_X de X est en fait entièrement caractérisée par les valeurs $P_X(\{x\}) = P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$. En effet, en supposant connues les valeurs précédentes et si $A \subset X(\Omega)$, on peut retrouver $P_X(A)$ par $\sigma-$additivité au plus dénombrable de la probabilité P_X en écrivant :

$$P_X(A) = \sum_{x \in A} P_X(\{x\}) = \sum_{x \in A} P(X = x)$$

- Deux variables peuvent avoir la même loi sans être égales comme le montre l'exemple suivant. En revanche, deux variables égales ont évidemment la même loi.

Exemple 1 – *Deux variables ayant la même loi ne sont pas forcément égales*

On se donne X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A})$ ne pouvant prendre que les valeurs -1 et 1 et dont la loi est donnée par $P(X=-1) = P(X=1) = 1/2$. On pose alors $Y = -X$.
Montrer que X et Y ont la même loi mais qu'elles ne sont pas égales.

Méthode – *Donner la loi d'une variable aléatoire discrète*

En pratique, pour donner la loi d'une variable aléatoire discrète X définie sur $(\Omega, \mathscr{A})$ on procède en deux étapes :

(1) On détermine les valeurs possibles de X, c'est-à-dire $X(\Omega)$;

(2) Pour chaque valeur possible $x \in X(\Omega)$, on détermine la probabilité de l'obtenir, c'est-à-dire $P(X=x)$.

Lorsque la variable X est finie, c'est-à-dire lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble fini, on peut résumer la loi de X dans un tableau sous la forme donnée ci-contre :

$x_i \in X(\Omega)$	...	...	...	...
$P(X = x_i)$	...	...	...	...

Exemple 2

On lance une infinité de fois une pièce qui tombe sur *Pile* avec probabilité $p \in]0,1[$ et on appelle X le rang du lancer amenant le premier *Pile*. Déterminer la loi de X.

Proposition 2 – *Système complet d'événements associé à une variable aléatoire discrète*

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.
La famille d'événements $((X=x))_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.

Remarque En particulier, on a l'identité $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x) = 1$.

La proposition qui suit permet de justifier que toute probabilité sur un univers au plus dénombrable peut être vue comme la loi d'une variable aléatoire discrète.

Proposition 3 – *Construction d'une variable aléatoire de loi donnée*

- **Cas fini :** Soit $\{x_1, \dots, x_N\}$ une sous-partie finie de E.
  Si $(p_1, \dots, p_N)$ est une famille de N réels positifs vérifiant la relation $\sum_{n=1}^{N} p_n = 1$, alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et une variable aléatoire discrète $X : \Omega \to E$ vérifiant :
  $$\forall n \in [\![1, N]\!], \quad P(X = x_i) = p_i$$
- **Cas dénombrable :** Soit $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ une sous-partie dénombrable de E.
  Si $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs vérifiant la relation $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et une variable aléatoire discrète $X : \Omega \to E$ vérifiant :
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = x_n) = p_n$$

Remarque La proposition précédente est très fréquemment utilisée sans même y faire référence. Par exemple, un énoncé classique du type : « Soit X la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X=n) = \frac{1}{2^{n+1}} \text{ »}$$
l'utilise pour assurer, étant donné que les termes $1/2^{n+1}$ sont positifs et de somme 1, qu'il existe bien un espace

probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ et une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{N}$ vérifiant la contrainte annoncée. En particulier, on ne s'attache presque jamais à vraiment expliciter l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$.

Exemple 3

Soit $\lambda > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur α pour qu'il existe une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{N}$ vérifiant la condition :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(X = n) = \alpha \frac{\lambda^n}{n!}$$

II. Couples de variables aléatoires discrètes

Dans la suite du chapitre, on ne mentionne plus les espaces d'arrivée des variables aléatoires discrètes considérées sauf lorsque cela est nécessaire. Ce choix peut se justifier par le fait que si $X : \Omega \to E$ est une variable aléatoire discrète, l'ensemble réellement utile à considérer est celui des valeurs possibles de X, à savoir $X(\Omega)$, et non E.

II. 1. Notion de couple

Définition 3 – *Couple de variables aléatoires discrètes*

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathscr{A})$.
L'application $w \in \Omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega))$ est une variable aléatoire discrète.
On parle du *couple de variables aléatoires discrètes* (X, Y).

Exemple 4

On lance une infinité de fois une pièce qui tombe sur *Pile* avec probabilité $p \in]0, 1[$. On appelle X le rang du lancer amenant le premier *Pile* et Y le rang du lancer amenant le deuxième *Pile*.
Prouver que (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes et donner l'ensemble de ses valeurs possibles.

II. 2. Loi conjointe

Définition 4 – *Loi conjointe*

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$.
On appelle *loi conjointe* du couple (X, Y) la loi du couple (X, Y).

Remarque L'ensemble des valeurs possibles du couple (X, Y) étant $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on obtient, d'après ce qui précède, que la loi du couple (X, Y) est entièrement déterminée par la donnée des quantités :

$$\mathrm{P}(X = x, Y = y), \quad (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$$

où l'on utilise la notation $(X = x, Y = y)$ pour désigner l'événement $(X = x) \cap (Y = y)$.
Lorsque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, la loi du couple (X, Y) peut être présentée sous la forme d'un tableau.

Méthode – *Donner la loi d'un couple de variables aléatoires discrètes*

En pratique, pour donner la loi d'un couple (X, Y) de variables aléatoires discrètes, on procède en deux étapes :

(1) On détermine les valeurs possibles du couple (X, Y), c'est-à-dire $X(\Omega) \times Y(\Omega)$;

(2) Pour chaque valeur possible $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on détermine la probabilité de l'obtenir, c'est-à-dire la probabilité $\mathrm{P}(X = x, Y = y)$.

Exemple 5

On lance une infinité de fois une pièce qui tombe sur *Pile* avec probabilité $p \in]0,1[$. On appelle X le rang du lancer amenant le premier *Pile* et Y le rang du lancer amenant le deuxième *Pile*.
Donner la loi conjointe du couple (X,Y).

Proposition 4 – *Système complet d'événements associé à un couple*

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega,\mathscr{A})$.
La famille d'événements $\big((X=x, Y=y)\big)_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ est un système complet d'événements.

Remarque En particulier, on a l'identité $\displaystyle\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} P(X=x,Y=y)=1$.

Exemple 6

On lance une infinité de fois une pièce qui tombe sur *Pile* avec probabilité $p \in]0,1[$. On appelle X le rang du lancer amenant le premier *Pile* et Y le rang du lancer amenant le deuxième *Pile*. Vérifier que :

$$\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} P(X=x,Y=y)=1$$

II. 3. Lois marginales

Définition 5 – *Lois marginales*

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$.
Les lois de X et Y sont respectivement appelées *première* et *deuxième lois marginales* du couple (X,Y).

Proposition 5 – *Calcul des lois marginales*

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$.

$$\forall x\in X(\Omega),\quad P(X=x)=\sum_{y\in Y(\Omega)} P(X=x,Y=y) \qquad \text{et} \qquad \forall y\in Y(\Omega),\quad P(Y=y)=\sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x,Y=y)$$

Exemple 7

On lance une infinité de fois une pièce qui tombe sur *Pile* avec probabilité $p \in]0,1[$. On appelle X le rang du lancer amenant le premier *Pile* et Y le rang du lancer amenant le deuxième *Pile*.
Calculer les lois marginales X et Y du couple (X,Y).

II. 4. Lois conditionnelles

Définition 6 – *Lois conditionnelles*

Soient (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$ et $y\in Y(\Omega)$ tel que $P(Y=y)\neq 0$.

L'application
$$P_{(Y=y)} : \begin{array}{ccc} \mathscr{A} & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & P_{(Y=y)}(X\in A) \end{array}$$

est un probabilité sur $(\Omega,\mathscr{A})$. On l'appelle la *loi conditionnelle de* X *sachant* $(Y=y)$.

Remarque On pourrait bien entendu définir de manière analogue la *loi conditionnelle de* Y *sachant* $(X = x)$ pour un $x \in X(\Omega)$ tel que $P(X = x) \neq 0$.

Méthode – *Donner la loi conditionnelle de* X *sachant* $(Y = y)$

En pratique, si (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes et $y \in Y(\Omega)$ tel que $P(Y = y) \neq 0$, on donne la loi conditionnelle de X sachant $(Y = y)$ en donnant les probabilités conditionnelles $P_{(Y=y)}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$. Le calcul est possible si l'on connaît la loi conjointe et la seconde loi marginale du couple puisque :

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P_{(Y=y)}(X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$$

Exemple 8

On lance une infinité de fois une pièce qui tombe sur *Pile* avec probabilité $p \in]0,1[$. On appelle X le rang du lancer amenant le premier *Pile* et Y le rang du lancer amenant le deuxième *Pile*.
Pour $k \geqslant 2$ fixé, donner la loi conditionnelle de X sachant $(Y = k)$.

III. Indépendance

Définition 7 – *Variables indépendantes*

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Les variables X et Y sont dites *indépendantes* si :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

Remarque Trouver la loi conjointe d'un couple (X, Y) de variables aléatoires discrètes indépendantes est donc immédiat si l'on connaît la loi des variables X et Y.

Exemple 9

On lance une infinité de fois une pièce qui tombe sur *Pile* avec probabilité $p \in]0,1[$. On appelle X le rang du lancer amenant le premier *Pile* et Y le rang du lancer amenant le deuxième *Pile*.
Déterminer si les variables X et Y sont indépendantes.

Proposition 6 – *Caractérisation de l'indépendance*

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Les variables X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall A \subset X(\Omega), \quad \forall B \subset Y(\Omega), \quad P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

Définition 8 – *Variables mutuellement indépendants, cas fini*

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Les variables $X_1, \dots, X_n$ sont dites *mutuellement indépendants* si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), \quad P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdots P(X_n = x_n)$$

Remarques

- Lorsqu'il n'y pas d'ambiguïté, on se contentera souvent de dire que les variables aléatoires sont indépendantes et non *mutuellement* indépendantes.

- Si des variables aléatoires sont mutuellement indépendantes, elles sont deux à deux indépendantes. La réciproque est fausse.

Définition 9 – *Variables mutuellement indépendantes, cas dénombrable*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$.
Les variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites *mutuellement indépendantes* si pour toute partie finie non vide $I\subset\mathbb{N}$ les variables $(X_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendantes.

Remarque En pratique, il est assez rare de devoir vérifier que des variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendantes. Ce sont plutôt les conditions de réalisation de l'expérience aléatoire étudiée qui donnent l'indépendance. Par contre, une fois que des variables aléatoires sont mutuellement indépendantes, on se sert très souvent de la définition pour mener des calculs de probabilités.

Exemple 10

On réalise une infinité de lancers d'une pièce de monnaie équilibrée. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire discrète X_n qui vaut 1 si le $n-$ème lancer a donné *Pile* et 0 sinon.
Justifier que les variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes.

Le théorème suivant, dont la démonstration est hors-programme, assure l'existence de suites de variables aléatoires discrètes indépendantes dont les lois sont fixées à l'avance.

Théorème 1 – *Existence de suites de variables indépendantes*

Soit $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de lois de probabilités discrètes.
Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$ et une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires discrètes indépendantes sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$ telles que la loi de probabilité de X_n soit L_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Remarque Le théorème précédent est couramment utilisé sans même y faire référence. Par exemple, il justifie un énoncé classique du type : « Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de lois de Bernoulli de paramètre $p\in\,]0,1[$, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad X_n(\Omega)=\{0,1\}\quad\text{et}\quad P(X_n=1)=1-P(X_n=0)=p \text{ »}$$

Proposition 7 – *Indépendance et composition par une fonction*

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$ et $f:X(\Omega)\to E_1$ et $g:Y(\Omega)\to E_2$ deux fonctions. Alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont des variables aléatoires discrètes indépendantes.

IV. Variables aléatoires discrètes réelles

Dans cette partie, sauf mention plus précise, toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$ et réelles, c'est-à-dire qu'elles sont à valeurs dans $E=\mathbb{R}$.

IV. 1. Fonction de répartition

Définition 10 – *Fonction de répartition*

Soit X une variable aléatoire discrète réelle. On appelle *fonction de répartition de* X la fonction :

$$F_X:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&[0,1]\\ x&\longmapsto&P(X\leqslant x)\end{array}$$

Proposition 8 – *Propriétés de la fonction de répartition*

Soient X une variable aléatoire discrète réelle et F_X sa fonction de répartition. Alors :

- F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
- On a $\lim\limits_{-\infty} F_X = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} F_X = 1$.

Proposition 9 – *Fonction de répartition d'une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$*

Soit X une variable aléatoire discrète réelle telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. On note F_X sa fonction de répartition. Alors F_X est constante par morceaux sur $\mathbb{R}$:

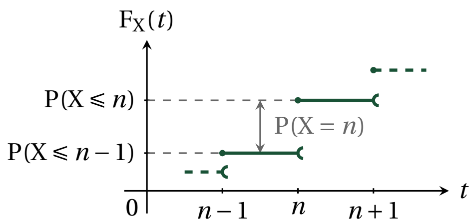
$$\forall t \in]-\infty, 0[, \quad F_X(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [n, n+1[, \quad F_X(t) = P(X \leqslant n)$$

De plus, la loi de X est entièrement déterminée par sa fonction de répartition :

$$P(X = 0) = F_X(0) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = F_X(n) - F_X(n-1)$$

Remarques

- Ainsi, la fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est constante par morceaux sur $\mathbb{R}$ et ses points de discontinuité sont les entiers naturels $n \in \mathbb{N}$ tels que $P(X = n) > 0$; dans ce cas, la « hauteur du saut » est $P(X = n)$ comme l'illustre la figure ci-contre.
- Ce type de résultat peut être adapté au cas d'une variable discrète à valeurs dans $\mathbb{Z}$ ou de façon plus générale à toute variable aléatoire discrète réelle.



Méthode – *Étude de variables aléatoires définies par un maximum ou un minimum*

La fonction de répartition est très adaptée pour trouver la loi de variables aléatoires définies par un minimum ou un maximum. En effet, si on se donne par exemple X et Y deux variables aléatoires discrètes et si on pose $S = \max(X, Y)$ et $I = \min(X, Y)$ alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_S(t) = P(S \leqslant t) = P(\max(X, Y) \leqslant t) = P(X \leqslant t, Y \leqslant t)$$

De façon similaire, on a également :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 1 - F_I(t) = P(I > t) = P(\min(X, Y) > t) = P(X > t, Y > t)$$

Exemple 11

On se donne X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
Déterminer la loi de la variable aléatoire définie par $S = \max(X_1, X_2)$.

IV. 2. Espérance

Définition 11 – *Espérance*

Soit X une variable aléatoire discrète réelle.

- **Cas où $X(\Omega)$ est fini :** On écrit $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_N\}$.
On appelle *espérance de* X et l'on note E(X) le réel :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{N} x_n P(X = x_n)$$

- **Cas où $X(\Omega)$ est dénombrable :** On écrit $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.
On dit que X *admet une espérance* ou que X *est d'espérance finie* si la série $\sum x_n P(X = x_n)$ converge absolument. Dans ce cas, on appelle *espérance de* X et l'on note E(X) le réel :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$$

Remarques

- Dans le cas où $X(\Omega)$ est dénombrable et où X est à valeurs positives, la convergence absolue de la série $\sum x_n P(X = x_n)$ est équivalente à sa convergence.
- Toujours dans le cas où $X(\Omega)$ est dénombrable, la définition sous-entend que la convergence et la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$ ne dépend pas de l'ordre dans lequel on a énuméré les éléments de $X(\Omega)$. Ceci est une conséquence de la convergence absolue de la série considérée.

Exemple 12

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$P(X = 0) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = \frac{1}{3^n}$$

Après avoir vérifié que la définition de X est légitime, étudier si X admet une espérance.

Exemple 13 – *Deux variables aléatoires ayant la même loi ont même espérance.*

On se donne deux variables aléatoires admettant toutes deux une espérance. Si l'on suppose que les deux variables ont la même loi, démontrer qu'elles ont même espérance.

Proposition 10 – *Espérance d'une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$*

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Alors X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 1} P(X \geqslant n)$ converge et dans ce cas :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$$

Proposition 11 – *Propriétés de l'espérance*

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- **Linéarité :** Si X et Y admettent une espérance alors $\lambda X + Y$ aussi et $E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)$.
- **Positivité :** Si X admet une espérance et est à valeurs positives alors $E(X) \geqslant 0$.
De plus, on a $E(X) = 0$ si et seulement si $X = 0$ presque sûrement.
- **Croissance :** Si X et Y admettent une espérance et si $X \leqslant Y$ alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

Proposition 12 – *Espérance et indépendance*

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles.
Si X et Y admettent une espérance et sont indépendantes alors la variable XY admet une espérance et :

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

IV. 3. Formule de transfert

Pour X une variable aléatoire discrète réelle et $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction, le théorème suivant, dont la démonstration est hors-programme, montre qu'il n'est pas nécessaire de déterminer la loi de $f(X)$ pour calculer l'espérance de $f(X)$ et que la connaissance de loi de X est suffisante.

Théorème 2 – *Théorème de transfert*

Soit X une variable aléatoire discrète réelle.

- **Cas où $X(\Omega)$ est fini :** On écrit $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_N\}$.
  Pour toute fonction $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$, on a :

$$E(f(X)) = \sum_{n=1}^{N} f(x_n) P(X = x_n)$$

- **Cas où $X(\Omega)$ est dénombrable :** On écrit $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.
  Pour toute fonction $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$, la variable $f(X)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum f(x_n) P(X = x_n)$ converge absolument et dans ce cas :

$$E(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n) P(X = x_n)$$

Exemple 14

On considère une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ dont la loi est donnée par les probabilités $P(X = -1) = 1/9$, $P(X = 0) = 2/9$ et $P(X = 1) = 6/9$. Calculer $E(X^2)$ d'une part en utilisant le théorème de transfert et d'autre part en déterminant au préalable la loi de X^2.

IV. 4. Moments

Définition 12 – *Moments*

Soient X une variable aléatoire discrète réelle et $p \in \mathbb{N}^*$.
On dit que X admet un moment d'ordre p si la variable X^p admet une espérance. Le moment d'ordre p est alors $E(X^p)$.

Remarque Dans le cas où $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_N\}$ est fini, X admet un moment d'ordre p qui peut être exprimé grâce au théorème de transfert appliqué à la fonction $f : x \mapsto x^p$:

$$E(X^p) = \sum_{n=1}^{N} x_n^p P(X = x_n)$$

Si $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable, alors, par théorème de transfert appliqué à la fonction $f : x \mapsto x^p$, X admet un moment d'ordre p si et seulement si la série $\sum x_n^p P(X = x_n)$ converge absolument et dans ce cas :

$$E(X^p) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^p P(X = x_n)$$

Proposition 13 – *L'existence du moment d'ordre 2 implique l'existence de l'espérance*

Soit X une variable aléatoire discrète réelle.
Si X admet un moment d'ordre 2, elle admet une espérance.

PROPOSITION 14 – *Espérance du produit de deux variables admettant un moment d'ordre 2*

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles.
Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors XY admet une espérance.

PROPOSITION 15 – *Ensemble des variables admettant un moment d'ordre 2*

L'ensemble $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ des variables aléatoires discrètes réelles définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ admettant un moment d'ordre 2 est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.
En particulier, toute combinaison linéaire de variables aléatoires discrètes réelles admettant un moment d'ordre 2 admet un moment d'ordre 2.

IV. 5. VARIANCE

DÉFINITION 13 – *Variance*

Soit X une variable aléatoire discrète réelle admettant un moment d'ordre 2.
On appelle *variance de* X et on note V(X) le réel :

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}\left[(\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2\right]$$

REMARQUES

- Cette définition a un sens puisque si X admet un moment d'ordre 2 alors X^2 admet une espérance et X également par propriété de sorte que l'on peut considérer E(X) et que $(\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2 = \mathrm{X}^2 - 2\mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{X} + \mathrm{E}(\mathrm{X})^2$ admet bien une espérance.
- Par positivité de l'espérance, la variance est une quantité positive.
- Toute variable X telle que $\mathrm{X}(\Omega)$ est fini admet une variance.

PROPOSITION 16 – *Formule de König–Huygens*

Soit X une variable aléatoire discrète réelle admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - \mathrm{E}(\mathrm{X})^2$$

PROPOSITION 17 – *Transformation affine et variance*

Soient X une variable aléatoire discrète réelle admettant un moment d'ordre 2 et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Alors la variable $a\mathrm{X}+b$ admet une variance donnée par :

$$\mathrm{V}(a\mathrm{X}+b) = a^2\mathrm{V}(\mathrm{X})$$

IV. 6. COVARIANCE

DÉFINITION 14 – *Covariance*

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles admettant un moment d'ordre 2.
On appelle *covariance de* X *et* Y et on note Cov(X, Y) le réel :

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \mathrm{E}\left[(\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X}))(\mathrm{Y}-\mathrm{E}(\mathrm{Y}))\right]$$

Remarque Cette définition a un sens puisque si X et Y admettent un moment d'ordre 2 alors X, Y et XY admettent une espérance par propriété de sorte que l'on peut considérer $E(X)$ et $E(Y)$ et que $(X-E(X))(Y-E(Y)) = XY-E(X)Y-E(Y)X+E(X)E(Y)$ admet bien une espérance.

Proposition 18 – *Formule de König–Huygens*

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Proposition 19 – *Indépendance et covariance*

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles admettant un moment d'ordre 2.
Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Exemple 15 – *Covariance nulle n'implique pas indépendance*

On réalise le lancer d'un dé à quatre faces équiprobables numérotées -2, -1, 1 et 2 et on appelle X le résultat obtenu. Montrer que $\mathrm{Cov}(X,|X|) = 0$ et étudier si les variables X et $|X|$ sont indépendantes.

Proposition 20 – *Propriétés de la covariance*

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires discrètes réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- **Symétrie :** $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$
- **Bilinéarité :** $\mathrm{Cov}(\lambda X+Y,Z) = \lambda\,\mathrm{Cov}(X,Z)+\mathrm{Cov}(Y,Z)$ et $\mathrm{Cov}(X,\lambda Y+Z) = \lambda\,\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{Cov}(X,Z)$.
- **Positivité :** $\mathrm{Cov}(X,X) = V(X) \geqslant 0$.

Proposition 21 – *Variance d'une somme*

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles admettant un moment d'ordre 2. Alors :

- $V(X+Y) = V(X)+V(Y)+2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$
- Si de plus X et Y sont indépendantes alors : $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$.

Remarque Le résultat précédent peut tout à fait être étendu au cadre plus général de $n \geqslant 2$ variables aléatoires discrètes réelles $X_1,\dots,X_n$ admettant des moments d'ordre 2. On a alors, en utilisant la symétrie de la covariance :

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i,X_j) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i,X_j)$$

Si de plus les variables $X_1,\dots,X_n$ sont deux à deux indépendantes, on a :

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

IV. 7. Écart-type et coefficient de corrélation

Définition 15 – *Écart-type*

Soit X une variable aléatoire discrète réelle admettant un moment d'ordre 2.
On appelle *écart-type de* X et on note $\sigma(X)$ le réel :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

PROPOSITION 22 – *Inégalité de Cauchy–Schwarz*

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$$

DÉFINITION 16 – *Coefficient de corrélation*

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles admettant un moment d'ordre 2 et dont les écarts-types sont non nuls, c'est-à-dire que $\sigma(X) \neq 0$ et $\sigma(Y) \neq 0$.
On appelle *coefficient de corrélation de* X *et* Y et on note $\rho(X,Y)$ le réel :

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

REMARQUES

- L'inégalité de Cauchy–Schwarz donne $\left|\rho(X,Y)\right| \leqslant 1$.
- Si X et Y sont indépendantes alors $\rho(X,Y) = 0$, la réciproque étant fausse.
- Le coefficient de corrélation de deux variables renseigne sur le degré de dépendance linéaire entre les deux variables. Lorsqu'il est proche de 1, l'une des variables est une fonction affine et croissante de l'autre variable ; lorsqu'il est proche de -1 l'une des variables est une fonction affine et décroissante de l'autre. Une corrélation égale à 0 signifie que les variables ne sont pas corrélées linéairement, elles peuvent néanmoins être corrélées non-linéairement.

V. VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES À VALEURS DANS $\mathbb{N}$

DÉFINITION 17 – *Fonction génératrice*

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On appelle fonction génératrice de X la fonction G_X définie par :

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\,t^n$$

pour les valeurs de $t \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la variable t^X admet une espérance.

REMARQUES 1

- La seconde égalité de la définition précédente découle du théorème de transfert. On rappelle par ailleurs que ce dernier stipule que la variable t^X admet une espérance si et seulement si la série $\sum P(X=n)\,t^n$ est absolument convergente.
- Si la variable X ne prend qu'un nombre fini de valeurs, on peut remarquer que sa fonction génératrice G_X est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est polynomiale.
- La fonction génératrice G_X est toujours définie en 1 avec $G_X(1) = 1$.

PROPOSITION 23 – *Série entière associée à une fonction génératrice*

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Alors la série entière $\sum P(X=n)\,t^n$ de la variable réelle a un rayon de convergence au moins égal à 1 et converge normalement sur $[-1,1]$.

Proposition 24 – *Domaine de définition et régularité d'une fonction génératrice*

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice G_X. Alors :

- Le domaine de définition de G_X contient $[-1,1]$.
- La fonction G_X est continue sur $[-1,1]$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

Proposition 25 – *La fonction génératrice caractérise la loi*

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice G_X.
Alors la loi de la variable X est entièrement déterminée par sa fonction génératrice G_X. Plus précisément :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$

Remarque Par conséquent, deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ ont même loi si et seulement si elles ont même fonction génératrice.

Théorème 3 – *Lien entre espérance et fonction génératrice*

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice G_X.
Alors X admet une espérance si et seulement si G_X est dérivable en 1 et dans ce cas :

$$E(X) = G_X'(1)$$

Théorème 4 – *Lien entre variance et fonction génératrice*

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice G_X.
Alors X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1 et dans ce cas :

$$E(X(X-1)) = G_X''(1)$$

Remarque Par conséquent, si G_X est deux fois dérivable en 1, on a les relations :

$$E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X) = G_X''(1) + G_X'(1) \qquad \text{et} \qquad V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2$$

Proposition 26 – *Fonction génératrice d'une somme de deux variables indépendantes*

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonctions génératrices G_X et G_Y.
Si X et Y sont indépendantes alors, en tout point $t \in \mathbb{R}$ pour lequel $G_X(t)$ et $G_Y(t)$ sont définis, on a :

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t)$$

VI. Lois usuelles

VI. 1. Loi de Bernoulli

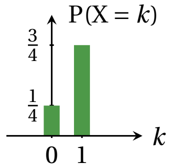
Définition 18 – *Loi de Bernoulli*

Soient X une variable aléatoire discrète réelle et $p \in [0,1]$.
On dit que X suit la *loi de Bernoulli de paramètre p* et on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ si :

$$X(\Omega) = \{0,1\} \qquad \text{et} \qquad P(X=0) = 1-p \quad \text{et} \quad P(X=1) = p$$

Remarque – *Modélisation*

La loi de Bernoulli de paramètre p modélise une expérience aléatoire comportant deux issues possibles, souvent appelées « succès » (la valeur 1) et « échec » (la valeur 0), dont la probabilité de « succès » est p et la probabilité d'« échec » $1-p$.



Loi de Bernoulli $\mathscr{B}(\frac{3}{4})$

Proposition 27 – *Espérance, variance et fonction génératrice*

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$. En posant $q = 1-p$, on a :

- **Espérance :** $E(X) = p$
- **Variance :** $V(X) = pq$
- **Fonction génératrice :** $\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = pt + q$

VI. 2. Loi binomiale

Définition 19 – *Loi binomiale*

Soient X une variable aléatoire discrète réelle et $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.
On dit que X suit la *loi binomiale de paramètres n et p* et on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ si :

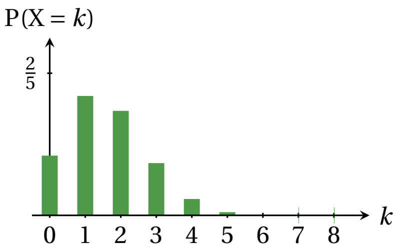
$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![0,n]\!], \quad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Remarque – *Modélisation*

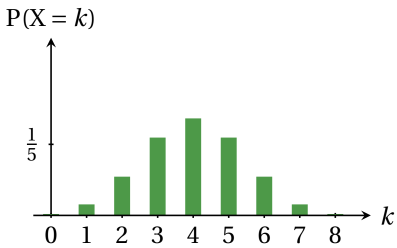
La loi binomiale de paramètres n et p modélise le nombre de succès obtenus lors de la réalisation de n épreuves indépendantes de Bernoulli de même paramètre p.

Exemple 16 – *Justification de la modélisation*

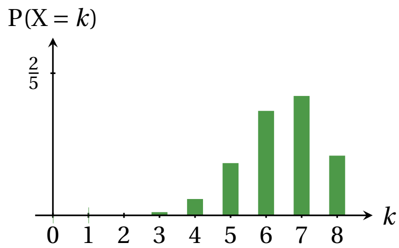
> On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. On réalise n expériences indépendantes de Bernoulli de même paramètre p et on appelle X le nombre de succès obtenus. Prouver que $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.



Loi binomiale $\mathscr{B}(8, \frac{1}{5})$



Loi binomiale $\mathscr{B}(8, \frac{1}{2})$



Loi binomiale $\mathscr{B}(8, \frac{4}{5})$

Proposition 28 – *Espérance, variance et fonction génératrice*

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$. En posant $q = 1-p$, on a :

- **Espérance :** $E(X) = np$
- **Variance :** $V(X) = npq$
- **Fonction génératrice :** $\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = (pt+q)^n$

VI. 3. Loi uniforme

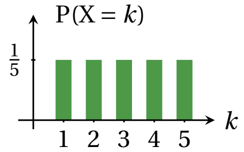
Définition 20 – *Loi uniforme*

Soient X une variable aléatoire discrète réelle et $a \leqslant b$ deux entiers.
On dit que X suit la *loi uniforme sur* $[\![a,b]\!]$ et on note $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![a,b]\!])$ si :

$$X(\Omega) = [\![a,b]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![a,b]\!], \quad P(X=k) = \frac{1}{b-a+1}$$

Remarque – *Modélisation*

La loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$ modélise la situation où l'on choisit « au hasard », c'est-à-dire de façon équiprobable, un entier parmi les entiers de $[\![a,b]\!]$.



Loi uniforme $\mathscr{U}([\![1,5]\!])$

Proposition 29 – *Espérance, variance et fonction génératrice*

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![a,b]\!])$. On a :

- **Espérance :** $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$
- **Variance :** $V(X) = \dfrac{(b-a+1)^2-1}{12}$
- **Fonction génératrice :** $\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = \dfrac{1}{b-a+1}(t^a + t^{a+1} + \cdots + t^b)$

VI. 4. Loi géométrique

Définition 21 – *Loi géométrique*

Soient X une variable aléatoire discrète réelle et $p \in]0,1[$.
On dit que X suit la *loi géométrique de paramètre* p et on note $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ si :

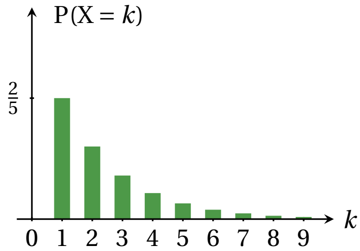
$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$$

Remarque – *Modélisation*

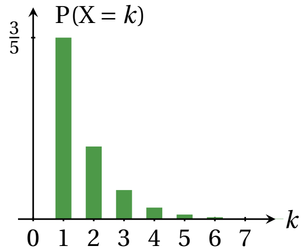
La loi géométrique de paramètre p modélise le rang du premier succès lors de la réalisation d'une suite infinie d'épreuves indépendantes de Bernoulli de même paramètre p.

Exemple 17 – *Justification de la modélisation*

> On fixe $p \in]0,1[$. On réalise une succession d'expériences indépendantes de Bernoulli de même paramètre p et on appelle X le rang du premier succès obtenu. Prouver que $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.



Loi géométrique $\mathscr{G}(\frac{2}{5})$



Loi géométrique $\mathscr{G}(\frac{3}{5})$

Proposition 30 – *Espérance, variance et fonction génératrice*

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$. En posant $q = 1 - p$, on a :

- **Espérance :** X admet une espérance et $E(X) = \dfrac{1}{p}$
- **Variance :** X admet une variance et $V(X) = \dfrac{q}{p^2}$
- **Fonction génératrice :** $\forall t \in \left]-1/q, 1/q\right[, \quad G_X(t) = \dfrac{pt}{1 - qt}$

Exemple 18

On se donne une variable aléatoire X qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in \left]0,1\right[$.
Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X > n) = (1 - p)^n$$

Proposition 31 – *Caractère sans mémoire de la loi géométrique*

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
Alors X est une loi géométrique si et seulement si :

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2, \quad P_{(X>n)}(X > n + k) = P(X > k)$$

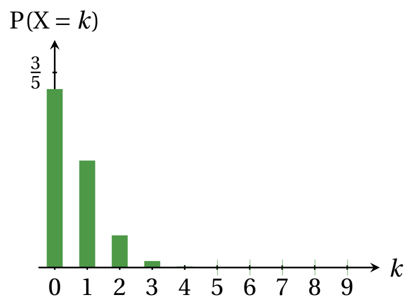
Remarque L'assertion précédente est appelée *la propriété d'absence de mémoire* de la loi de X. Les lois géométriques sont les seules lois discrètes sur $\mathbb{N}^*$ qui la satisfont. Elle peut se traduire par le fait que la probabilité qu'il n'y ait pas encore eu de succès au temps $n + k$ sachant qu'il n'y en a pas eu avant l'instant n est égale à la probabilité qu'il n'y ait pas encore eu de succès au temps k : la loi oublie ce qu'il s'est passé avant le temps n.

VI. 5. Loi de Poisson

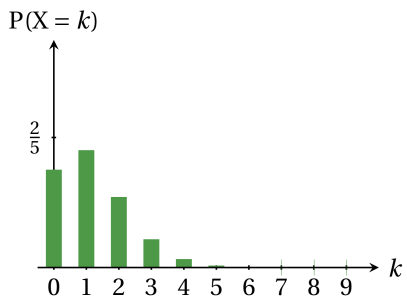
Définition 22 – *Loi de Poisson*

Soient X une variable aléatoire discrète réelle et $\lambda > 0$.
On dit que X suit la *loi de Poisson de paramètre* λ et on note $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ si :

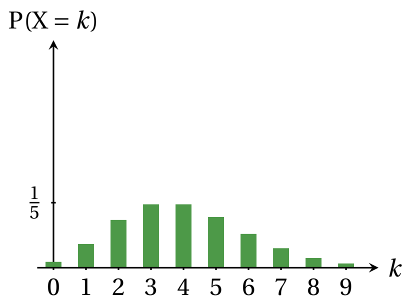
$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$



Loi de Poisson $\mathscr{P}(0,6)$



Loi de Poisson $\mathscr{P}(1,2)$



Loi de Poisson $\mathscr{P}(4)$

PROPOSITION 32 – *Espérance, variance et fonction génératrice*

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. On a :

- **Espérance :** X admet une espérance et $E(X) = \lambda$
- **Variance :** X admet une variance et $V(X) = \lambda$
- **Fonction génératrice :** $\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$

Le résultat qui suit montre que la loi de Poisson est naturellement obtenue comme « limite » de lois binomiales. Cela permettra *a posteriori* de mieux comprendre ce que peut modéliser la loi de Poisson.

PROPOSITION 33 – *Approximation de la loi de Poisson par des lois binomiales*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable X_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p_n)$ avec $p_n \in [0,1]$.
Si la suite $(np_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\lambda > 0$ alors :

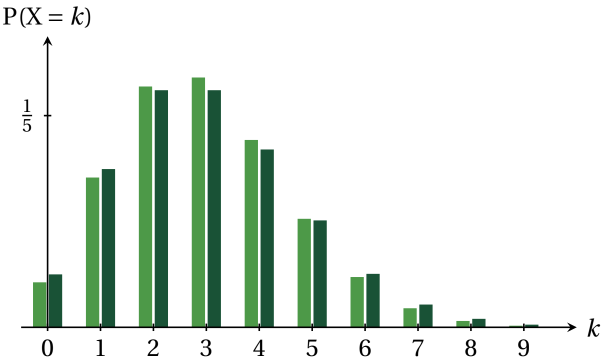
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

REMARQUE – *Modélisation*

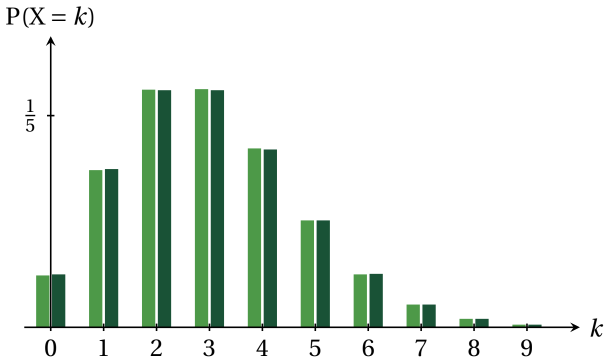
Le résultat de la proposition précédente s'interprète en disant que la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ peut-être approchée par une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p_n)$ telle que :

- le nombre n d'expériences de Bernoulli indépendantes considérées est grand ;
- chaque expérience de Bernoulli a la même probabilité de succès p_n faible, p_n étant calibré pour que la quantité np_n soit proche de λ.

Sous cette approximation, la loi de Poisson modélise donc un nombre de succès sur un grand nombre d'expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre de succès petit. On dit que la loi de Poisson est la *loi des événements rares.*



Comparaison des lois binomiale $\mathscr{B}(30, \frac{1}{10})$ et Poisson $\mathscr{P}(3)$



Comparaison des lois binomiale $\mathscr{B}(300, \frac{1}{100})$ et Poisson $\mathscr{P}(3)$

EXEMPLE Supposons que l'on souhaite modéliser le nombre d'entrées dans un musée sur une période d'une heure, sachant que l'on constate habituellement une moyenne de 30 visiteurs par heure.

- On peut tout d'abord aborder le problème minute par minute en partant du principe qu'à chaque minute le musée reçoit un visiteur avec probabilité $1/2$ et n'en reçoit pas avec probabilité $1/2$. Le nombre de visiteurs sur une heure est alors une loi binomiale $\mathscr{B}(60, 1/2)$.
- On peut recommencer le raisonnement en raisonnant seconde par seconde afin de rendre le modèle plus réaliste. On obtient alors une loi binomiale $\mathscr{B}(3600, 1/120)$.

- Si l'on souhaite rendre ce modèle plus réaliste encore, on peut raffiner le découpage. La proposition précédente montre qu'« à la limite », nous allons obtenir la loi de Poisson $\mathscr{P}(30)$ qui apparaît alors comme un choix pertinent pour modéliser notre situation.

Proposition 34 – *Somme de deux lois de Poisson indépendantes*

Soient $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu)$ deux lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.
Si X et Y sont indépendantes, alors $X+Y$ suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda+\mu)$.

VII. Résultats asymptotiques

Théorème 5 – *Inégalité de Markov*

Soit X une variable aléatoire discrète réelle.
Si X est positive et admet une espérance alors :

$$\forall a > 0, \quad P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

Théorème 6 – *Inégalité de Bienaymé–Tchebychev*

Soit X une variable aléatoire discrète réelle admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Proposition 35 – *Loi faible des grands nombres*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes réelles admettant un moment d'ordre 2.
On suppose que les variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes deux à deux et de même loi et on note :

$$m = E(X_1), \qquad \sigma = \sigma(X_1) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Alors on a l'estimation : $\forall \varepsilon > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$

et en particulier la limite suivante, appelée *loi faible des grands nombres* :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Exercice 19 – *Interprétation de la loi faible des grands nombres*

On lance une infinité de fois un dé équilibré à six faces. On définit, pour $n \geqslant 1$, la variable X_n qui vaut 1 si le n−ème lancer a donné un 6 et 0 sinon. On introduit aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

1. Prouver que les variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes deux à deux et donner leurs lois.
   Justifier également qu'elles admettent la même espérance que l'on notera m et donner sa valeur.
2. Interpréter la quantité S_n/n pour $n \geqslant 1$.
3. Justifier que la loi faible des grands nombres s'applique sur la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et interpréter son résultat.