CALCUL DIFFÉRENTIEL

PLAN DU COURS

Dans ce chapitre, on fixe un entier $p \geqslant 1$. On s'intéresse aux fonctions de p variables, définies sur un ouvert U non vide de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs réelles. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$ est muni d'une norme notée $\|\cdot\|$.

I. FONCTIONS DE CLASSE $\mathscr{C}^1$

I. 1. DÉRIVÉES PARTIELLES ET CLASSE $\mathscr{C}^1$

DÉFINITION 1 – *Dérivée selon un vecteur en un point*

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathrm{U}$. On se donne $v \in \mathbb{R}^p$ non nul.
On dit que f *admet une dérivée en a selon le vecteur v* si la fonction de la variable réelle $\varphi : t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0. Le cas échéant, cette dérivée est notée $\mathrm{D}_v f(a)$ et vaut :

$$\mathrm{D}_v f(a) = \varphi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

REMARQUE – *Domaine de définition de la fonction φ*

On n'a pas précisé le domaine de définition de la fonction φ de la définition précédente. Pour être plus précis, la partie U étant ouverte, il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(a,r) \subset \mathrm{U}$. Ainsi, en posant $\delta = r/\|v\|$, on a que, pour tout $t \in \,]-\delta, \delta[$, $a + tv \in \mathrm{B}(a,r) \subset \mathrm{U}$. En conclusion, φ est au moins définie sur $]-\delta, \delta[$.

Définition 2 – *Dérivées partielles*

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \mathrm{U}$ et $j \in [\![1, p]\!]$.
On dit que f admet une *dérivée partielle par rapport à la j−ème variable en a* si f admet une dérivée en a selon le vecteur e_j de la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Dans ce cas, on note cette dérivée partielle :

$$\partial_j f(a) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

Si f admet une dérivée partielle par rapport à la j−ème variable en tout point de U, l'application définie sur U par $a \mapsto \partial_j f(a)$ est la *dérivée partielle par rapport à la j−ème variable de f*.

Remarque – *Cas de deux variables*

Dans la cas $p = 2$, on note x et y les variables de f et on pose $a = (a_1, a_2)$. On a alors, sous réserve d'existence :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + t) - f(a_1, a_2)}{t}$$

Exemple 1

Prouver que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$ admet des dérivées partielles par rapport à x et y en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Définition 3 – *Fonction de classe $\mathscr{C}^1$*

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que f est *de classe $\mathscr{C}^1$* sur U si toutes ses dérivées partielles sont définies et continues sur U.

Notation L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur U sera noté $\mathscr{C}^1(\mathrm{U}, \mathbb{R})$.

Exemple 2

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en posant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

(1) Prouver que l'on peut prolonger f par continuité en $(0,0)$ et donner la valeur de $f(0,0)$.
On pourra passer en coordonnées polaires, c'est-à-dire poser $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

(2) Montrer que les dérivées partielles de f existent sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et les donner.

(3) Étudier l'existence des dérivées partielles de f en $(0,0)$.

(4) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Théorème 1 – *Théorème fondamental du calcul différentiel*

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction.
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U alors f admet en tout point a de U un développement limité à l'ordre 1, c'est-à-dire que pour tout $h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $a + h$ soit dans U, on peut écrire :

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{j=1}^{p} h_j \partial_j f(a) + o(h)$$

Remarque Pour rappel, la quantité $o(h)$ peut s'écrire $o(h) = \varepsilon(h)\|h\|$ pour une certaine fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ tendant vers 0 lorsque h tend vers 0. Autrement dit, $o(h)/\|h\|$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

Proposition 1 – *Classe $\mathscr{C}^1$ implique continuité*

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction.
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U alors f est continue sur U.

Remarque Comme dans le cas de la variable réelle, la réciproque est fausse.

I. 2. Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Proposition 2 – *Combinaison linéaire*

Soient f et g deux fonctions définies sur U et à valeurs réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur U alors $\lambda f + g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et :

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad \partial_j(\lambda f + g) = \lambda \partial_j f + \partial_j g$$

En particulier, l'ensemble $\mathscr{C}^1(\mathrm{U}, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathrm{U}, \mathbb{R})$.

Proposition 3 – *Produit*

Soient f et g deux fonctions définies sur U et à valeurs réelles.
Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur U alors fg est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et :

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad \partial_j(fg) = (\partial_j f)g + f(\partial_j g)$$

Proposition 4 – *Cas des fonctions polynomiales*

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une application polynomiale, c'est-à-dire qu'il existe une partie finie I de $\mathbb{N}^p$ et une famille de scalaires $(\lambda_{k_1,\ldots,k_p})_{(k_1,\ldots,k_p)\in \mathrm{I}}$ tels que :

$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p, \quad f(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{(k_1,\ldots,k_p)\in \mathrm{I}} \lambda_{k_1,\ldots,k_p} x_1^{k_1} \cdots x_p^{k_p}$$

Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$.

Proposition 5 – *Composition par une fonction de la variable réelle*

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction et $\varphi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction de la variable réelle définie sur un intervalle I d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$ tel que $f(\mathrm{U}) \subset \mathrm{I}$.
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et si φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I alors $\varphi \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et :

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad \partial_j(\varphi \circ f) = (\varphi' \circ f) \times \partial_j f$$

Exemple 3

Justifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \ln(x^2 y^2 + x^4 + 1)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 6 – *Inverse*

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction ne s'annulant pas.
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U alors $1/f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et :

$$\forall j \in [\![1,p]\!], \quad \partial_j\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{\partial_j f}{f^2}$$

Proposition 7 – *Quotient*

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction et $g : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction ne s'annulant pas.
Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur U alors f/g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et :

$$\forall j \in [\![1,p]\!], \quad \partial_j\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(\partial_j f)g - f(\partial_j g)}{g^2}$$

I. 3. Différentielle

Définition 4 – *Différentielle*

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
On appelle *différentielle de f en a* $\in$ U, notée $\mathrm{d}f(a)$, l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$(h_1, \dots, h_p) \longmapsto \sum_{j=1}^{p} h_j \partial_j f(a)$$

Remarques 1

- Si $a \in \mathrm{U}$ est fixé, il est facile de vérifier que $\mathrm{d}f(a)$ est bien une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.
- Si $h \in \mathbb{R}^p$, on note $\mathrm{d}f(a)(h)$ ou encore $\mathrm{d}f(a) \cdot h$ l'image du vecteur h par l'application linéaire $\mathrm{d}f(a)$.
- On appelle *différentielle de f*, notée $\mathrm{d}f$, l'application $a \mapsto \mathrm{d}f(a)$ définie de U dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$.
- La différentielle permet une nouvelle écriture du théorème fondamental du calcul différentiel : si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U alors, pour tout $h \in \mathbb{R}^p$ tel que $a + h$ soit dans U, on peut écrire :

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot h + o(h)$$

- Si $v \in \mathbb{R}^p$, on a la relation $\mathrm{D}_v f(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot v$.

I. 4. Règle de la chaîne

Théorème 2 – *Dérivation le long d'un arc $\mathscr{C}^1$*

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et $x_1, \dots, x_p$ des fonctions de la variable réelles de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$ telles que $(x_1(t), \dots, x_p(t)) \in \mathrm{U}$ pour tout $t \in \mathrm{I}$.
Alors la fonction $g : t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_p(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad g'(t) = \sum_{j=1}^{p} x_j'(t) \partial_j f(x_1(t), \dots, x_p(t))$$

Remarques

- En notant $\gamma : t \in \mathrm{I} \mapsto (x_1(t), \dots, x_p(t))$, γ est une paramétrisation d'une trajectoire tracée dans l'ouvert U. On compose ensuite par la fonction f pour obtenir la fonction g, ce qui revient à parcourir la fonction f selon la trajectoire γ.
- En utilisant la différentielle de f, le résultat précédent peut s'écrire sous la forme condensée suivante :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad g'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

Théorème 3 – *Règle de la chaîne*

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^2$ et x et y deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^2$ telles que $(x(u,v), y(u,v)) \in \mathrm{U}$ pour tout $(u,v) \in \Omega$.
Alors la fonction $h : (u,v) \mapsto f(x(u,v), y(u,v))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et, pour tout $(u,v) \in \Omega$:

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v)) + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v)) + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))$$

Remarques

- On abrège parfois la règle de la chaîne en omettant les points où sont évaluées les dérivées partielles :
$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial y}$$
- On peut tout à fait généraliser la règle de la chaîne pour une fonction du type :
$$h : (u_1, \dots, u_q) \mapsto f(x_1(u_1,\dots,u_q), \dots, x_p(u_1,\dots,u_q))$$
où f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^p$ et $x_1,\dots,x_p$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^q$ telles que $(x_1(u_1,\dots,u_q),\dots,x_p(u_1,\dots,u_q)) \in \mathrm{U}$ pour tout $(u_1,\dots,u_q) \in \Omega$:
$$\forall i \in [\![1,q]\!], \quad \frac{\partial h}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial x_j}{\partial u_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

Exemple 4 – *Coordonnées polaires*

On se donne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et on définit une fonction h sur $\mathbb{R}^2$ permettant de passer en *coordonnées polaires* en posant :

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^2, \quad h(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Justifier que h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et donner ses dérivées partielles.

Proposition 8 – *Caractérisation des fonctions constantes sur un convexe*

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert convexe non vide de $\mathbb{R}^p$.
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U alors f est constante sur U si et seulement si $\mathrm{d}f = 0$ sur U, c'est-à-dire si $\partial_j f = 0$ sur U pour tout $j \in [\![1,p]\!]$.

Exemple 5

Montrer que la fonction f définie sur l'ouvert $\mathrm{U} = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 1$ si $x > 0$ et $f(x,y) = -1$ si $x < 0$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et de dérivées partielles nulles sans être constante. Interpréter le résultat.

I. 5. Gradient

Dans cette sous-partie, on munit $\mathbb{R}^p$ de son produit scalaire canonique noté $(\cdot\,|\,\cdot)$.

Définition 5 – *Gradient*

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $a \in \mathrm{U}$.
On appelle *gradient de f en a*, noté $\nabla f(a)$, le vecteur de $\mathbb{R}^p$ défini par :

$$\nabla f(a) = (\partial_1 f(a), \dots, \partial_p f(a))$$

L'application définie sur U par $a \mapsto \nabla f(a)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ est le *gradient de f*.

Exemple En physique, la *première loi de Fourier* relie le vecteur densité de flux thermique $\boldsymbol{j}_{\mathrm{Q}}$ au gradient de la température T par la relation $\boldsymbol{j}_{\mathrm{Q}} = -\lambda \nabla \mathrm{T}$ où λ est la conductivité thermique.

Remarque Les opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ permettent d'écrire, sous les mêmes notations et hypothèses que précédemment, les relations suivantes :

$$\nabla(\lambda f + g) = \lambda \nabla f + \nabla g, \qquad \nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g, \qquad \nabla(\varphi \circ f) = (\varphi' \circ f)\nabla f \qquad \text{et} \qquad \nabla\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{\nabla f}{f^2}$$

Proposition 9 – *Expression de la différentielle en fonction du gradient*

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $a \in \mathrm{U}$. Alors :

$$\forall h \in \mathbb{R}^p, \quad \mathrm{d}f(a) \cdot h = (\nabla f(a) \mid h)$$

II. Fonctions de classe $\mathscr{C}^2$

II. 1. Dérivées partielles d'ordre 2 et classe $\mathscr{C}^2$

Définition 6 – *Dérivées partielles d'ordre 2*

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$.
On dit que f admet une *dérivée partielle d'ordre 2 par rapport aux i−ème et j−ème variables* si la dérivée partielle $\partial_i(\partial_j f)$ de $\partial_j f$ existe sur U. Dans ce cas, on note cette dérivée partielle :

$$\partial^2_{i,j} f \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Remarque Les notations précédentes précisent l'ordre des variables par rapport auxquelles on dérive successivement, c'est-à-dire que la dérivée partielle seconde $\partial^2_{i,j} f$ est obtenue en dérivant f d'abord par rapport à la variable x_j puis par rapport à la variable x_i. Le théorème de Schwarz, énoncé plus loin, permettra d'affirmer que cet ordre est en fait sans importance pour les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$.

Définition 7 – *Fonction de classe $\mathscr{C}^2$*

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que f est *de classe $\mathscr{C}^2$* sur U si toutes ses dérivées partielles d'ordre 2 sont définies et continues sur U.

Notation L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur U sera noté $\mathscr{C}^2(\mathrm{U}, \mathbb{R})$.

Exemple 6

Justifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^3 + x^2 y + y^3$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et donner l'expression de ses dérivées partielles premières et secondes.

Remarque – *Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$*

Concernant les opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$, les mêmes résultats que pour la classe $\mathscr{C}^1$ peuvent être énoncés. C'est-à-dire que la classe $\mathscr{C}^2$ est stable par combinaison linéaire, produit, composition par une fonction de la variable réelle de classe $\mathscr{C}^2$ et inverse et quotient si le dénominateur ne s'annule pas.

II. 2. Théorème de Schwarz

Théorème 4 – *Théorème de Schwarz*

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Remarques

- Ainsi, si f est de classe $\mathscr{C}^2$, on peut calculer ses dérivées partielles secondes sans se soucier de l'ordre des variables par rapport auxquelles on dérive successivement.
- Attention, les dérivées partielles croisées $\partial^2_{i,j} f$ et $\partial^2_{j,i} f$ peuvent exister sans être égales. Si elles sont en plus continues, elles le seront, puisqu'on aura alors f de classe $\mathscr{C}^2$ et que le théorème de Schwarz s'appliquera.

II. 3. Matrice hessienne

Définition 8 – *Matrice hessienne*

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$.
Pour $a \in \mathrm{U}$, on appelle *matrice hessienne de f en a* la matrice notée $\mathrm{H}_f(a)$ définie par :

$$\mathrm{H}_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$$

Remarque Grâce au théorème de Schwarz, on obtient que la matrice hessienne d'une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ en un point a est symétrique réelle. En particulier, le théorème spectral assure qu'elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Proposition 10 – *Formule de Taylor-Young à l'ordre 2*

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et $a \in \mathrm{U}$.
Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}^p$ tel que $a + h \in \mathrm{U}$, on a :

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + (\nabla f(a) \mid h) + \frac{1}{2}(h \mid \mathrm{H}_f(a) h) + o(\|h\|^2) \\ &= f(a) + h^{\mathrm{T}} \nabla f(a) + \frac{1}{2} h^{\mathrm{T}} \mathrm{H}_f(a) h + o(\|h\|^2) \end{aligned}$$

III. Applications du calcul différentiel

III. 1. Courbes planes

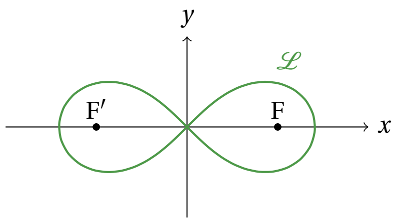
Dans cette sous-partie, on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique $(\cdot \mid \cdot)$ et de sa norme associée $\|\cdot\|$.
On désigne par U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.

Définition 9 – *Courbe plane*

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
L'ensemble Γ des points $(x, y) \in \mathrm{U}$ du plan $\mathbb{R}^2$ vérifiant la relation $f(x, y) = 0$ est appelé *courbe plane d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$*.

Exemples

- Si $\varphi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$, la courbe plane d'équation cartésienne $y - \varphi(x) = 0$ est la courbe représentative de la fonction φ dans le plan.
- La courbe plane $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec (a, b, c) un triplet de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $(a, b) \neq (0,0)$ est une droite du plan dont un vecteur directeur est $(-b, a)$.
- La courbe plane $\mathscr{C}$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 1 = 0$ est le cercle unité du plan.
- On définit deux points $\mathrm{F} = (1,0)$ et $\mathrm{F}' = (-1,0)$ de $\mathbb{R}^2$ et on s'intéresse à l'ensemble $\mathscr{L}$ formé des points M du plan tels que le produit des distances FM et F′M soit égal à 1, c'est-à-dire défini par l'équation cartésienne :
$$((x-1)^2 + y^2)((x+1)^2 + y^2) - 1 = 0$$
La courbe plane $\mathscr{L}$ est une *lemniscate de foyers* F *et* F′.



Définition 10 – *Point régulier*

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et Γ la courbe plane d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$.

- Si $(x_0, y_0) \in \Gamma$, on dit que (x_0, y_0) est un *point régulier de* Γ si $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0,0)$.
- Si tous les points de Γ sont réguliers, on dit que Γ est une *courbe plane régulière*.

Définition 11 – *Tangente en un point régulier d'une courbe plane*

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et Γ la courbe plane d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$.
Pour tout point régulier $\mathrm{M}_0 = (x_0, y_0)$ de Γ, la *tangente à* Γ *en* M_0 est la droite passant par M_0 et orthogonale au vecteur $\nabla f(x_0, y_0)$, c'est-à-dire la droite d'équation :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

Exemple 7

Dans le cas de la courbe plane $\mathscr{C}$, c'est-à-dire pour le cercle unité du plan, donner l'équation de la tangente au point $(1,0)$ et vérifier graphiquement la cohérence du résultat.

Proposition 11 – *Lignes de niveau et gradient*

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on introduit la *ligne de niveau* L_λ comme étant l'ensemble des points de U vérifiant $f(x, y) = \lambda$.
Si $\mathrm{M}_0 = (x_0, y_0)$ est un point de L_λ alors $\nabla f(x_0, y_0)$ est orthogonal à L_λ et est orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.

Exemple 8

Dans le cas du cercle unité du plan $\mathscr{C}$ d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$ avec $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$, déterminer les lignes de niveaux $\mathrm{L}_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \lambda\}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.
Vérifier alors graphiquement le résultat précédent en traçant le gradient de f en quelques points.

Remarque En physique, en reprenant la *première loi de Fourier* qui s'écrit $\boldsymbol{j}_\mathbf{Q} = -\lambda \nabla \mathrm{T}$, on obtient que le vecteur densité de flux thermique $\boldsymbol{j}_\mathbf{Q}$ est orthogonal aux courbes isothermes et orienté dans le sens des températures décroissantes.

III. 2. Surfaces

Dans cette sous-partie, on se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique $(\cdot\,|\,\cdot)$ et de sa norme associée $\|\cdot\|$. On désigne par U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^3$.

Définition 12 – *Surface*

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
L'ensemble $\mathscr{S}$ des points $(x, y, z) \in \mathrm{U}$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ vérifiant la relation $f(x, y, z) = 0$ est appelé *surface d'équation cartésienne* $f(x, y, z) = 0$.

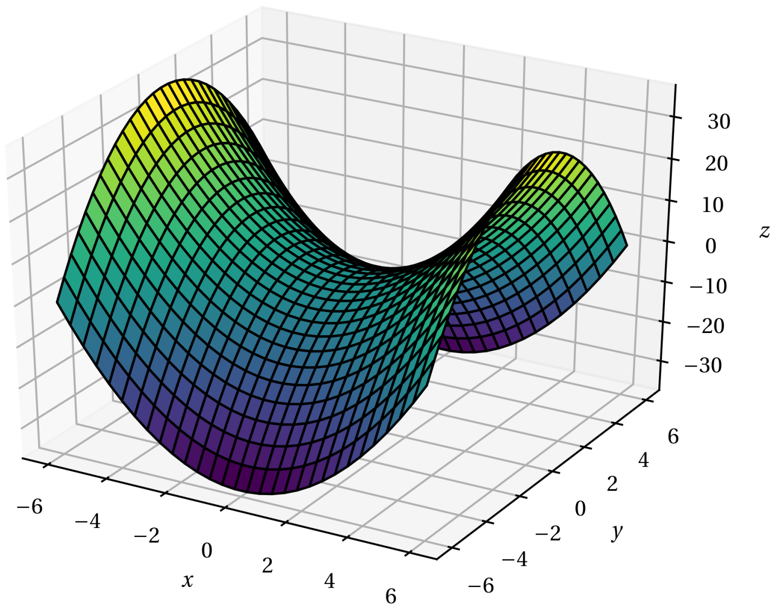
Définition 13 – *Point régulier*

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathscr{S}$ la surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$.

- Si $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{S}$, on dit que (x_0, y_0, z_0) est un *point régulier de* $\mathscr{S}$ si $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)$.
- Si tous les points de $\mathscr{S}$ sont réguliers, on dit que $\mathscr{S}$ est une *surface régulière*.

Exemples

- Si $g : \mathrm{W} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert non vide W de $\mathbb{R}^2$, la surface d'équation cartésienne $z - g(x, y) = 0$ est la surface représentative de la fonction g dans l'espace. On peut vérifier qu'elle est régulière.
- L'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ définit une surface $\mathscr{S}$ régulière qui correspond à la sphère unité.
- L'équation cartésienne $x^2 - y^2 - z = 0$ définit une surface $\mathscr{P}_h$ régulière appelée *paraboloïde hyperbolique*.



Exemple 9

Dans le cas du paraboloïde hyperbolique $\mathscr{P}_h$, déterminer l'intersection de la surface $\mathscr{P}_h$ avec les plans $x = x_0$, $y = y_0$ et $z = z_0$ avec $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.

Définition 14 – *Plan tangent en un point régulier d'une surface*

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathscr{S}$ la surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$.
Pour tout point régulier $\mathrm{M}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de $\mathscr{S}$, le *plan tangent à* $\mathscr{S}$ *en* M_0 est le plan passant par M_0 et orthogonal au vecteur $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$, c'est-à-dire le plan d'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Exemple 10

Dans le cas de la surface $\mathscr{P}_h$, déterminer le plan tangent à $\mathscr{P}_h$ en $\mathrm{O} = (0, 0, 0)$.

III. 3. Extrema d'une fonction de plusieurs variables

Dans cette sous-partie, les fonctions ne sont plus forcément définies sur des ouverts de $\mathbb{R}^p$. On introduit donc A une partie non vide de $\mathbb{R}^p$. Dans la suite, on note $(\cdot|\cdot)$ et $\|\cdot\|$ le produit scalaire canonique et la norme associée sur $\mathbb{R}^p$.

Définition 15 – *Extrema globaux*

Soient $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathrm{A}$.

- On dit que f admet un *maximum (global) en a* si : $\forall x \in \mathrm{A}, \quad f(x) \leqslant f(a)$.
- On dit que f admet un *minimum (global)en a* si : $\forall x \in \mathrm{A}, \quad f(x) \geqslant f(a)$.
- On dit que f admet un *extremum (global) en a* si f admet un maximum ou un minimum en a.

Définition 16 – *Extrema locaux*

Soient $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathrm{A}$.

- On dit que f admet un *maximum local en a* s'il existe un voisinage V_a de a tel que :
$$\forall x \in \mathrm{V}_a, \quad f(x) \leqslant f(a)$$
- On dit que f admet un *minimum local en a* s'il existe un voisinage V de a tel que :
$$\forall x \in \mathrm{V}_a, \quad f(x) \geqslant f(a)$$
- On dit que f admet un *extremum local en a* si f admet un maximum local ou un minimum local en a.

Théorème 5 – *Condition nécessaire pour un extremum sur un ouvert*

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ et $a \in \mathrm{U}$.
Si f admet un extremum local en a alors $\nabla f(a) = 0$.

Vocabulaire Les points a de U vérifiant $\nabla f(a) = 0$ sont appelés *points critiques de f*.

Remarques

- Le résultat précédent n'est valable que si la fonction est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur un *ouvert* U.
- Ainsi, les points en lesquels f admet un extremum sont à chercher parmi les points critiques de f.
Attention, les points critiques ne correspondent pas forcément à un extremum local.

PROPOSITION 12 – *Caractérisation d'un minimum sur un ouvert*

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ et $a \in \mathrm{U}$ un point critique de f.

- Si $\mathrm{H}_f(a) \in \mathrm{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ alors f admet un minimum local strict en a.
- Si $\mathrm{H}_f(a) \notin \mathrm{S}_p^{+}(\mathbb{R})$ alors f n'a pas de minimum en a.

PROPOSITION 13 – *Caractérisation d'un maximum sur un ouvert*

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ et $a \in \mathrm{U}$ un point critique de f.

- Si $-\mathrm{H}_f(a) \in \mathrm{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ alors f admet un maximum local strict en a.
- Si $-\mathrm{H}_f(a) \notin \mathrm{S}_p^{+}(\mathbb{R})$ alors f n'a pas de maximum en a.

PROPOSITION 14 – *Caractérisation d'un extremum dans le cas $p = 2$*

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et $a \in \mathrm{U}$ un point critique de f.

- Si $\det(\mathrm{H}_f(a)) < 0$, alors f n'admet pas d'extremum en a.
- Si $\det(\mathrm{H}_f(a)) > 0$ et $\mathrm{Tr}(\mathrm{H}_f(a)) > 0$ alors f admet un minimum local strict en a.
- Si $\det(\mathrm{H}_f(a)) > 0$ et $\mathrm{Tr}(\mathrm{H}_f(a)) < 0$ alors f admet un maximum local strict en a.

EXEMPLES 11

(1) Rechercher les extrema de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 + y^2$.

(2) Rechercher les extrema de la fonction f définie sur $[0,3] \times [1,5]$ par $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$.