Lycée Descartes
Tours

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

PSI
2022 – 2023

Plan du cours

Dans la suite, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Produit et somme d'espaces vectoriels

I. 1. Produit d'espaces vectoriels

Définition 1 – *Espace produit*

Soient $E_1, \dots, E_p$ une famille finie de $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels.
On définit sur le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_p$ deux lois :

- **L'addition :**

$$\forall (x_1, \dots, x_p), (y_1, \dots, y_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, \quad (x_1, \dots, x_p) + (y_1, \dots, y_p) = (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p)$$

- **La multiplication par un scalaire :**

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot (x_1, \dots, x_p) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_p)$$

Notation L'espace produit $E_1 \times \cdots \times E_p$ peut également être noté $\prod_{k=1}^{p} E_k$.

Proposition 1 – *Espace produit*

Soient $E_1, \dots, E_p$ une famille finie de $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels.
Alors le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_p$ muni des deux lois précédentes est un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel.

Proposition 2 – *Dimension d'un espace produit*

Soient $E_1, \dots, E_p$ une famille finie de $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels.
Si $E_1, \dots, E_p$ sont de dimension finie alors le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_p$ est de dimension finie et :

$$\dim(E_1 \times \cdots \times E_p) = \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_p)$$

I. 2. Somme d'espaces vectoriels

Définition 2 – *Somme de sous-espaces vectoriels*

Soient E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel et $E_1, \dots, E_p$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E.
On appelle *somme des sous-espaces vectoriels* $E_1, \dots, E_p$ l'ensemble noté $E_1 + \cdots + E_p$ défini par :

$$E_1 + \cdots + E_p = \left\{x_1 + \cdots + x_p,\ (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p\right\}$$

Notation La somme $E_1 + \cdots + E_p$ peut également être notée $\sum_{k=1}^{p} E_k$.

Remarque En définissant l'application φ suivante :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E_1 \times \cdots \times E_p & \longrightarrow & E \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & x_1 + \cdots + x_p \end{array}$$

on peut écrire que $E_1 + \cdots + E_p = \operatorname{Im} \varphi$.

Proposition 3 – *Somme de sous-espaces vectoriels*

Soient E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel et $E_1, \dots, E_p$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E.
Alors la somme $E_1 + \cdots + E_p$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque On peut montrer que $E_1 + \cdots + E_p$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant les sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_p$.

I. 3. Somme directe d'espaces vectoriels

Définition 3 – *Somme directe de sous-espaces vectoriels*

Soient E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel et $E_1, \dots, E_p$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E.
On dit que les sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_p$ sont *en somme directe* si :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, \quad x_1 + \cdots + x_p = 0 \implies x_1 = \cdots = x_p = 0$$

Dans ce cas, on note $E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ la somme $E_1 + \cdots + E_p$ et on dit que la somme est *directe*.

Notation La somme $E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ peut également être notée $\bigoplus_{k=1}^{p} E_k$.

Remarques

- La somme $E_1 + \cdots + E_p$ est directe si et seulement si l'application φ définie plus haut est injective.
- En première année, il a été vu que la somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$. Cette caractérisation ne s'étend pas au cas $p \geqslant 3$, c'est-à-dire que le fait que les intersections deux à deux soit réduites à $\{0\}$ ne permet pas de conclure que la somme est directe.

Exemple 1

Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $E_1 = \mathrm{Vect}((1,0))$, $E_2 = \mathrm{Vect}((0,1))$ et $E_3 = \mathrm{Vect}((1,1))$.
Montrer que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, $E_1 \cap E_3 = \{0\}$ et $E_2 \cap E_3 = \{0\}$ bien que la somme $E_1 + E_2 + E_3$ ne soit pas directe.

Proposition 4 – *Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels*

Soient E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel et $E_1, \ldots, E_p$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E.
Si $E_1, \ldots, E_p$ sont de dimension finie alors on a :

$$\dim\left(\sum_{k=1}^{p} E_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{p} \dim(E_k)$$

De plus il y a égalité si et seulement si la somme est directe.

Proposition 5 – *Décomposition dans une somme directe*

Soient E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel et $E_1, \ldots, E_p$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E.
La somme $E_1 + \cdots + E_p$ est directe si et seulement si :

$$\forall x \in E_1 + \cdots + E_p, \quad \exists!\,(x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, \quad x = \sum_{k=1}^{p} x_k$$

Remarques – *Sous-espaces supplémentaires*

- On dit que deux sous-espaces F et G d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E sont *supplémentaires* si $E = F \oplus G$.
- On rappelle les deux résultats suivants :
  $$E = F \oplus G \iff \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \text{ et } F \cap G = \{0\} \iff F + G = E \text{ et } \dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$$
- Tout sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E de dimension finie admet un supplémentaire.
  Il n'y a pas unicité du supplémentaire comme le montre l'exemple qui suit.

Exemples 2

(1) On note respectivement $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques et antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Prouver que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$.

(2) On travaille dans le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathscr{F}([-1,1], \mathbb{R})$ des fonctions de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ et on considère les sous-espaces vectoriels :

$$F_1 = \{f \in E,\ f \text{ est constante}\}, \quad F_2 = \{f \in E,\ f = 0 \text{ sur } [-1,0]\} \quad \text{et} \quad F_3 = \{f \in E,\ f = 0 \text{ sur } [0,1]\}$$

Prouver que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.

I. 4. Somme directe et bases

On commence par définir la notion de *base adaptée*.

Vocabulaire – *Bases adaptées*

- Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.
  On appelle *base adaptée* à F toute base $\mathscr{B}$ de E de la forme $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ avec $\mathscr{B}_1$ base de F.

- Soient E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie et $E_1, \dots, E_p$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$.
  On appelle *base adaptée à la décomposition en somme directe* toute base $\mathscr{B}$ de E de la forme $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_p)$ avec, pour $k \in [\![1, p]\!]$, $\mathscr{B}_k$ une base de E_k.

PROPOSITION 6 – *Somme directe et bases*

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie.

- Soit $\mathscr{B} = \left(\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_p\right)$ une base de E fractionnée en p sous-familles $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_p$ de vecteurs.

  Alors : $$E = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_k)$$

- On suppose que $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$ avec $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E.
  Si, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\mathscr{B}_k$ désigne une base de E_k, la famille $\mathscr{B} = \left(\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_p\right)$ est une base de E.

II. MATRICES ET ENDOMORPHISMES

II. 1. POLYNÔME D'UNE MATRICE, D'UN ENDOMORPHISME

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme.

On pose : $$A^0 = I_n \quad \text{et} \quad u^0 = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad A^k = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}} \quad \text{et} \quad u^k = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$$

On a alors : $$\forall k, \ell \in \mathbb{N}, \quad A^{k+\ell} = A^k A^\ell = A^\ell A^k \quad \text{et} \quad u^{k+\ell} = u^k \circ u^\ell = u^\ell \circ u^k$$

DÉFINITION 4 – *Polynôme d'une matrice, d'un endomorphisme*

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme et $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme.

On définit : $$P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \text{et} \qquad P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k \in \mathscr{L}(E)$$

On parle de *polynôme de matrice* ou de *polynôme d'endomorphisme*.

PROPOSITION 7 – *Opérations sur les polynômes de matrice et d'endomorphisme*

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice.

- L'application $P \mapsto P(A)$ est une application linéaire de $\mathbb{K}[X]$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
  Ainsi, si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :
  $$(\lambda P + Q)(A) = \lambda P(A) + Q(A)$$
- Si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ alors :
  $$(PQ)(A) = P(A)Q(A) = Q(A)P(A)$$

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme.

- L'application $P \mapsto P(u)$ est une application linéaire de $\mathbb{K}[X]$ sur $\mathscr{L}(E)$.
  Ainsi, si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :
  $$(\lambda P + Q)(u) = \lambda P(u) + Q(u)$$

- Si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ alors :

$$(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$$

Proposition 8 – *Matrice d'un polynôme d'endomorphisme*

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme, $\mathscr{B}$ une base de E et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme.

On a : $$M_{\mathscr{B}}(P(u)) = P(M_{\mathscr{B}}(u))$$

Définition 5 – *Polynôme annulateur d'une matrice, d'un endomorphisme*

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme.

- On dit que P est un *polynôme annulateur de* A *si* $P(A) = 0$
- On dit que P est un *polynôme annulateur de* u *si* $P(u) = 0$

Remarques 1

- Le polynôme nul est toujours un polynôme annulateur mais ce n'est pas le plus intéressant !
- Si P est annulateur de $u \in \mathscr{L}(E)$ ou $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, tout multiple de P l'est aussi.
- Si E est de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E)$ ou si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ alors il existe au moins un polynôme annulateur non nul de u ou de A.
  En effet, il suffit de remarquer que les familles $(\mathrm{id}_E, u, \dots, u^{n^2})$ et $(I_n, A, \dots, A^{n^2})$ sont liées dans $\mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- Si E est de dimension infinie, il peut ne pas exister d'autres polynômes annulateurs que le polynôme nul. Par exemple, si $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, l'endomorphisme qui à une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de polynôme annulateur non nul.

Exemple 3

Trouver des polynômes annulateurs (non nuls !) des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Méthode – *Calcul de l'inverse d'une matrice grâce à un polynôme annulateur*

S'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $P(0) \neq 0$ alors A est inversible et il est possible d'exprimer A^{-1} comme un polynôme en A.

En effet, si $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $a_0 = P(0) \neq 0$, on obtient, en plaçant le terme $a_0 I_n$ à droite et en factorisant par A à gauche :

$$P(A) = 0 \iff \sum_{k=1}^{d} a_k A^k + a_0 I_n = 0 \iff A\left(\sum_{k=1}^{d} a_k A^{k-1}\right) = -a_0 I_n$$

De même, en factorisant par A à droite, on a :

$$P(A) = 0 \iff \sum_{k=1}^{d} a_k A^k + a_0 I_n = 0 \iff \left(\sum_{k=1}^{d} a_k A^{k-1}\right) A = -a_0 I_n$$

On en déduit finalement que A est inversible et que :

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{d} a_k A^{k-1}$$

Méthode – *Calcul des puissances d'une matrice grâce à un polynôme annulateur*

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On se donne $k \in \mathbb{N}$ et on souhaite calculer A^k.

On effectue la division euclidienne de X^k par P, il existe $Q_k \in \mathbb{K}[X]$ et $R_k \in \mathbb{K}[X]$ de degré strictement inférieur à deg(P) tels que $X^k = PQ_k + R_k$. En appliquant en la matrice A il vient :

$$A^k = PQ_k(A) + R_k(A) = P(A)Q_k(A) + R_k(A) = R_k(A)$$

de sorte que l'obtention de la puissance k–ème de A se résume au calcul de $R_k(A)$.
Cette méthode est intéressante lorsqu'on dispose d'un polynôme annulateur de bas degré.

Exemple 4

Calculer l'inverse et les puissances de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

II. 2. Matrices par blocs et opérations

Définition 6 – *Matrice par blocs*

Soient $(N_1, \dots, N_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ et $(P_1, \dots, P_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$. On note $N = \sum_{i=1}^{n} N_i$ et $P = \sum_{j=1}^{p} P_j$.

On appelle *matrice par blocs de taille* $N \times P$ *à* $n \times p$ *blocs* toute matrice $A \in \mathscr{M}_{N,P}(\mathbb{K})$ s'écrivant :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,p} \end{pmatrix}$$

avec, pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$, $A_{i,j} \in \mathscr{M}_{N_i, P_j}(\mathbb{K})$.

Remarque Autrement dit, une matrice par blocs est une matrice dans laquelle les coefficients sont des matrices. Ces sous-matrices sont appelés les blocs et vérifient des conditions de compatibilité de taille.

Définition 7 – *Matrices diagonales et triangulaires par blocs*

- On appelle matrice *diagonale par blocs* toute matrice de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_n \end{pmatrix}$$

  où les blocs $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont des matrices carrées.
- On appelle matrice *triangulaire supérieure par blocs* toute matrice de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & A_n \end{pmatrix}$$

  où les blocs $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont des matrices carrées.

Proposition 9 – *Opérations sur les matrices par blocs*

- **Addition :** Soient A et B deux matrices par blocs de même taille :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,p} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n,1} & \cdots & B_{n,p} \end{pmatrix}$$

  On suppose que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$ les blocs $A_{i,j}$ et $B_{i,j}$ sont de même taille.
  Le calcul de $C = A + B$ peut alors s'effectuer par blocs, c'est-à-dire que :

$$C = \begin{pmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n,1} & \cdots & C_{n,p} \end{pmatrix}$$

  avec pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$, $C_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$.
- **Produit :** Soient A et B deux matrices par blocs de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,p} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{p,1} & \cdots & B_{p,q} \end{pmatrix}$$

  On suppose que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $k \in [\![1,p]\!]$ et $j \in [\![1,q]\!]$ le produit $A_{i,k}B_{k,j}$ peut être réalisé.
  Le calcul de $C = AB$ peut alors s'effectuer par blocs, c'est-à-dire que :

$$C = \begin{pmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n,1} & \cdots & C_{n,q} \end{pmatrix}$$

  avec pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,q]\!]$, $C_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k}B_{k,j}$.

Remarques

- Autrement dit, les opérations sur les matrices par blocs s'effectuent de la même façon que sur les matrices. La différence réside dans le fait que les coefficients ne sont plus des scalaires mais des sous-matrices et que, par conséquent, certaines conditions de compatibilité de taille doivent être vérifiées sur les blocs pour effectuer les opérations souhaitées.
- La multiplication par un scalaire d'une matrice par blocs ne pose aucun problème.

Exercice 5

Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ trois matrices. On introduit la matrice par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur les matrices A, B et D pour que la matrice M soit inversible. Exprimer alors M^{-1} sous la forme d'une matrice par blocs.

II. 3. Sous-espaces stables

Définition 8 – *Sous-espace stable et endomorphisme induit*

Soient E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que F *est stable par u* si $u(F) \subset F$, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in F, \quad u(x) \in F$$

Dans ce cas, on appelle *endomorphisme induit par u sur* F l'endomorphisme $u_F \in \mathcal{L}(F)$ défini par :

$$u_F : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$$

Remarques

- Il est clair que u_F est bien un endomorphisme de F.
- $\{0\}$ et E sont stables par tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$.
- Il ne faut pas confondre u_F qui est un endomorphisme de F (et qui n'a de sens que si F est stable par u) et $u_{|F}$ qui est une application linéaire de F dans E.

Exemples 6

(1) Déterminer les droites stables par l'endomorphisme $u : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (-5x+3y, 6x-2y) \in \mathbb{R}^2$.

(2) Déterminer les droites stables par l'endomorphisme $u : f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mapsto f' \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Proposition 10 – *Stabilité du noyau et de l'image*

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes.
Si u et v commutent, c'est-à-dire si $u \circ v = v \circ u$, alors $\operatorname{Ker} v$ et $\operatorname{Im} v$ sont stables par u.

Proposition 11 – *Traduction matricielle de la stabilité*

Soient E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel de dimension n, F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On se donne $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base adaptée à F, c'est-à-dire que $\mathcal{B}_F = \left(e_1, \dots, e_p\right)$ est une base de F.
Alors F est stable par u si et seulement si la matrice de u dans la base de $\mathcal{B}$ peut s'écrire par blocs sous la forme :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est la matrice de l'endomorphisme u_F induit par u sur F dans la base $\mathcal{B}_F$.

Remarque On peut tout à fait généraliser ce résultat à une somme directe. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $E_1, \dots, E_p$ est une famille de sous-espaces vectoriels de E tels que :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$$

alors u laisse stable $E_1, \dots, E_p$ si et seulement si sa matrice dans une base $\mathcal{B} = \left(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p\right)$ adaptée à cette somme directe est diagonale par blocs :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

où, pour $k \in [\![1, p]\!]$, $A_k \in \mathcal{M}_{\dim(E_k)}(\mathbb{K})$ est la matrice de l'endomorphisme u_{E_k} induit par u sur E_k dans la base $\mathcal{B}_k$ de E_k.

II. 4. Matrices semblables

Définition 9 – *Matrices semblables*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices.
On dit que les matrices A et B sont *semblables* s'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$.

Proposition 12 – *Interprétation en termes d'endomorphismes*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices.
Alors les matrices A et B sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme dans deux bases.

Exemple 7

Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Proposition 13 – *Matrices semblables et rang*

Deux matrices semblables ont même rang.

II. 5. Trace d'une matrice, d'un endomorphisme

Définition 10 – *Trace d'une matrice*

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice.
On appelle *trace de la matrice* A le scalaire noté Tr(A) défini par :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Proposition 14 – *Trace et opérations*

- L'application $A \mapsto \mathrm{Tr}(A)$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}$.
  Ainsi, si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\quad \mathrm{Tr}(\lambda A + B) = \lambda \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$
- Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\quad \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\quad \mathrm{Tr}({}^tA) = \mathrm{Tr}(A)$

Proposition 15 – *Trace et matrices semblables*

Deux matrices semblables ont même trace.

Remarque Deux matrices semblables ont donc même rang et même trace. En revanche, les réciproques sont fausses, c'est-à-dire que deux matrices ayant même rang et/ou même trace ne sont pas forcément semblables.

Exercice 8

1. Montrer que si deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables alors il en est de même des matrices $\lambda I_n + A$ et $\lambda I_n + B$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$.
2. Montrer que les matrices A et B suivantes ont même rang, même trace et même déterminant.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Sont-elles semblables ?

La proposition précédente rend légitime la définition suivante de la trace d'un endomorphisme.

Définition 11 – *Trace d'un endomorphisme*

Soit E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme.
On appelle *trace de l'endomorphisme u* la trace de la matrice de u dans n'importe quelle base de E.

Exercice 9

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur d'un $\mathbb{K}$−espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 1$.
Montrer que $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

III. Compléments sur les déterminants

III. 1. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Pour rappel, le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux. Nous allons généraliser ce résultat aux matrices triangulaires par blocs.

Proposition 16 – *Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs version* 2×2

Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$.

On a :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)$$

Remarque Ce résultat peut être généralisé par récurrence aux matrices triangulaires par blocs de taille quelconque.

Si M est une matrice triangulaire par blocs de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & A_n \end{pmatrix}$$

où les blocs $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont des matrices carrées, alors :

$$\det(M) = \det(A_1) \times \cdots \times \det(A_n)$$

Bien entendu, le cas d'une matrice triangulaire inférieure par blocs donne le même résultat.

III. 2. Déterminant de Vandermonde

Proposition 17 – *Déterminant de Vandermonde*

Pour $n \geqslant 1$, soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.
On appelle *déterminant de Vandermonde* relatif à $(a_1, \ldots, a_n)$ le déterminant noté $\mathrm{V}(a_1, \ldots, a_n)$ suivant :

$$\mathrm{V}(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On a alors :
$$\mathrm{V}(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$$

Ainsi, $\mathrm{V}(a_1, \ldots, a_n)$ est non nul si et seulement si les scalaires $a_1, \ldots, a_n$ sont distincts deux à deux.

Remarque Le déterminant de Vandermonde peut également être présenté sous sa version « transposée », ce qui ne change en rien sa valeur.

III. 3. Interpolation de Lagrange

Soient $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ où les $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ sont supposés distincts deux à deux. On cherche à savoir s'il y a existence et unicité d'un polynôme de degré au plus n valant b_i en chaque a_i pour tout $i \in [\![0, n]\!]$. On parle de problème d'interpolation de Lagrange.

Remarque Le problème posé revient à étudier l'injectivité et la surjectivité de l'application linéaire suivante :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & (\mathrm{P}(a_0), \ldots, \mathrm{P}(a_n)) \end{array}$$

Proposition 18 – *Existence et unicité*

Soient $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ où les $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ sont supposés distincts deux à deux.
Alors il existe un unique polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ vérifiant :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad \mathrm{P}(a_i) = b_i$$

Définition 12 – *Polynômes de Lagrange*

Soit $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ où les $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ sont supposés distincts deux à deux.
Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on définit le polynôme $\mathrm{L}_i \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ en posant :

$$\mathrm{L}_i(\mathrm{X}) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (\mathrm{X} - a_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (a_i - a_j)}$$

Remarque Si $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$, on observe que :

$$\mathrm{L}_i(a_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} = \delta_{i,j}$$

Proposition 19 – *Base d'interpolation*

- La famille $(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Si $P\in\mathbb{K}_n[X]$, sa décomposition dans la base $(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ s'écrit :
$$P=\sum_{i=0}^{n}P(a_i)L_i$$

Remarques

- Le deuxième point avec $P=1$ donne $\sum_{i=0}^{n}L_i=1$.
- L'unique polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ vérifiant $P(a_i)=b_i$ pour tout $i\in[\![0,n]\!]$ est $P=\sum_{i=0}^{n}b_iL_i$.

IV. Formes linéaires et hyperplans

Définition 13 – *Forme linéaire*

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.
On appelle *forme linéaire sur* E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Exemples 10

(1) L'application Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
(2) L'application $(x_1,\dots,x_n)\longmapsto x_1+\cdots+x_n$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$.

Remarque Si E est de dimension finie, l'espace $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ des formes linéaires sur E est un espace vectoriel de dimension $\dim(E)\times\dim(\mathbb{K})=\dim(E)$.

Définition 14 – *Hyperplan*

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.
On appelle *hyperplan de* E tout sous-espace vectoriel H de E pouvant s'écrire $H=\operatorname{Ker}\varphi$ où φ est une forme linéaire non nulle sur E.

Exemples 11

(1) L'ensemble $H=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \operatorname{Tr}(M)=0\}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
(2) L'ensemble $H=\left\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n,\ x_1+\cdots+x_n=0\right\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}^n$.
(3) L'ensemble $H=\{P\in\mathbb{R}[X],\ \ 3P(2)=2P(1)\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}[X]$.

Proposition 20 – *Caractérisation d'un hyperplan en dimension finie*

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n et H un sous-espace vectoriel de E.
Alors H est un hyperplan de E si et seulement si $\dim(H)=n-1$.

Remarques

- Si $\dim(E)=2$, les hyperplans de E sont les droites vectorielles de E ; si $\dim(E)=3$, les hyperplans de E sont les plans vectoriels de E.
- La preuve de la proposition montre que si H est un hyperplan de E et si $a\notin H$ alors $E=H\oplus\operatorname{Vect}(a)$.