RÉDUCTION

Plan du cours

Dans la suite, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel.

I. Éléments propres

I. 1. Éléments propres d'un endomorphisme

Définition 1 – *Éléments propres d'un endomorphisme*

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme.

- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est *valeur propre de u* s'il existe un vecteur non nul $x \in \mathrm{E}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
- On dit que $x \in \mathrm{E}$ est *vecteur propre de u associé à la valeur propre* $\lambda \in \mathbb{K}$ s'il est non nul et s'il vérifie $u(x) = \lambda x$.
- L'ensemble des valeurs propres de u, noté $\mathrm{sp}(u)$, est le *spectre de u*.
- Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u, le *sous-espace propre de u associé à la valeur propre* λ, noté $\mathrm{E}_\lambda(u)$ est :

$$\mathrm{E}_\lambda(u) = \{x \in \mathrm{E},\ u(x) = \lambda x\}$$

Remarques 1 – *Premières propriétés fondamentales*

(1) Un vecteur $x \in \mathrm{E}$ non nul est un vecteur propre de u si et seulement si la droite $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par u.

(2) Un vecteur propre $x \in E$ de u est associé à une unique valeur propre puisque $\lambda x = \mu x$ implique $\lambda = \mu$ étant donné que $x \neq 0$ par définition.

(3) Si $\lambda \in \mathbb{K}$, on remarque que $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\, \mathrm{id}_E)$ de sorte que $E_\lambda(u)$ est un sous-espace vectoriel de E.

(4) Le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u si et seulement si $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\, \mathrm{id}_E) \neq \{0\}$, c'est-à-dire, si et seulement si $u - \lambda\, \mathrm{id}_E$ n'est pas injectif. En dimension finie, cela équivaut au fait que $u - \lambda\, \mathrm{id}_E$ n'est pas bijectif et donc à $\det(u - \lambda\, \mathrm{id}_E) = 0$.
En particulier, 0 est valeur propre de u si et seulement s'il n'est pas injectif. Dans ce cas on a $E_0(u) = \mathrm{Ker}\, u$.

(5) Noter que l'ensemble des vecteurs propres de u associés à la valeur propre λ est $E_\lambda(u) \setminus \{0\}$.

Exemples 1

(1) Éléments propres de $u : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (x + y, x + y) \in \mathbb{R}^2$.

(2) Éléments propres de $u : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (x - 2y, 3x + y) \in \mathbb{R}^2$ puis sur $\mathbb{C}^2$.

(3) Éléments propres de $u : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \longmapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Proposition 1 – *Stabilité des sous-espaces propres*

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et $v \in \mathscr{L}(E)$ deux endomorphismes.
Si u et v commutent, c'est-à-dire si $u \circ v = v \circ u$, alors les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

Proposition 2 – *Les sous-espaces propres sont en somme directe*

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ des valeurs propres deux à deux distinctes de u.
Alors les sous-espaces propres associés $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_p}(u)$ sont en somme directe.

Proposition 3 – *Vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes*

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme et $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs propres de u associés à des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de u deux à deux distinctes.
Alors la famille $\left(x_1, \dots, x_p\right)$ est libre.

Proposition 4 – *En dimension finie*

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme. On suppose E de dimension finie n.

- Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de u alors :

$$\sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}) \leqslant n$$

- L'endomorphisme u a au plus n valeurs propres distinctes.

Remarque Lorsque $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u, le cas d'égalité dans la majoration précédente nous intéressera tout particulièrement dans la suite lorsque nous parlerons de diagonalisabilité.

I. 2. Éléments propres d'une matrice

Identification Dans ce qui suit, on identifiera très souvent $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$.
On rappelle que l'application qui à $x \in \mathbb{K}^n$ associe la matrice colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont les coordonnées de x dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est un isomorphisme.

DÉFINITION 2 – *Éléments propres d'une matrice*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice.

- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est *valeur propre de* A s'il existe une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulle telle que $AX = \lambda X$.
- On dit que $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est *vecteur propre de* A *associé à la valeur propre* $\lambda \in \mathbb{K}$ s'il est non nul et s'il vérifie $AX = \lambda X$.
- L'ensemble des valeurs propres de A, noté $\mathrm{sp}(A)$, est le *spectre de* A.
- Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A, le *sous-espace propre de* A *associé à la valeur propre* λ, noté $E_\lambda(A)$ est :

$$E_\lambda(A) = \left\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ AX = \lambda X\right\}$$

REMARQUES 2 – *Premières propriétés fondamentales*

- Le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible, c'est-à-dire, si et seulement si $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Cela équivaut à $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n$.
  En particulier, 0 est valeur propre de A si et seulement si A n'est pas inversible. Dans ce cas on a $E_0(A) = \mathrm{Ker}\,A$.
- On peut rechercher les éléments propres d'une matrice en étudiant le système linéaire qui découle de l'équation $AX = \lambda X$.
- Les résultats précédemment établis pour les endomorphismes, à savoir les **PROPOSITIONS 1, 2, 3, 4** se transposent bien entendu au cas des matrices.

EXEMPLE 2

Éléments propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

PROPOSITION 5 – *Lien entre éléments propres d'un endomorphisme et d'une matrice*

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $A = M_{\mathscr{B}}(u)$.
On a alors $\mathrm{sp}(A) = \mathrm{sp}(u)$ et pour tout $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E_\lambda(u) \quad \Longleftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_\lambda(A)$$

EXEMPLE 3

Comparer les résultats obtenus entre l'item **(1)** des **EXEMPLES 1** et l'**EXEMPLE 2**.

I. 3. POLYNÔMES ANNULATEURS

PROPOSITION 6 – *Polynômes d'endomorphismes et de matrices et éléments propres*

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. On se donne $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Si $x \in E_\lambda(u)$, on a : $P(u)(x) = P(\lambda)x$
- Si $X \in E_\lambda(A)$, on a : $P(A)(X) = P(\lambda)X$

PROPOSITION 7 – *Polynômes annulateurs et valeurs propres*

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur d'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ (resp. d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) alors toute valeur propre de u (resp. de A) est racine de P.

REMARQUE – *Ce n'est qu'une inclusion !*

Ce résultat donne que le spectre de u ou de A est inclus dans l'ensemble des racines du polynôme annulateur P mais l'autre inclusion n'est pas réalisée en général.
Par exemple, le polynôme $P(X) = X(X-1)$ est annulateur de id_E ou de I_n mais $\mathrm{sp}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{sp}(I_n) = \{1\}$ alors que P admet 0 et 1 pour racines.

I. 4. POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

En dimension finie, le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u (resp. de A) si et seulement si $u - \lambda\,\mathrm{id}_E$ (resp. $A - \lambda I_n$) n'est pas inversible, c'est-à-dire, si et seulement si $\det(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) = 0$ (resp. $\det(A - \lambda I_n) = 0$). Par conséquent, les fonctions $\lambda \mapsto \det(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)$ et $\lambda \mapsto \det(A - \lambda I_n)$ définies sur $\mathbb{R}$ ont un rôle déterminant à jouer dans la suite.

Dans ce qui suit, E est supposé de dimension finie égale à n.

DÉFINITION 3 – *Polynôme caractéristique d'un endomorphisme, d'une matrice*

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice.

- On appelle *polynôme caractéristique de u* la fonction notée χ_u définie par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \chi_u(\lambda) = \det(\lambda\,\mathrm{id}_E - u)$$

- On appelle *polynôme caractéristique de* A la fonction notée χ_A définie par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$

Les fonctions χ_u et χ_A sont des polynômes de degré n.

REMARQUES

- On aurait pu choisir de poser, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_u(\lambda) = \det(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)$. Cette nouvelle définition et celle choisie plus haut sont reliées par l'identité $\det(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) = \det(-(\lambda\,\mathrm{id}_E - u)) = (-1)^n \det(\lambda\,\mathrm{id}_E - u)$.
  L'avantage de la définition choisie est donc que le polynôme caractéristique est unitaire.
- Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda I_n - A) = \det({}^t(\lambda I_n - A)) = \det(\lambda I_n - {}^tA)$ de sorte que A et ${}^tA$ ont le même polynôme caractéristique.

PROPOSITION 8 – *Expression du polynôme caractéristique*

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice. En notant χ_u et χ_A les polynômes caractéristiques de u et de A, on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \chi_u(\lambda) = \lambda^n - \mathrm{Tr}(u)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u) \qquad \text{et} \qquad \chi_A(\lambda) = \lambda^n - \mathrm{Tr}(A)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$$

THÉORÈME 1 – *Polynôme caractéristique et valeurs propres*

Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre d'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ (resp. d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) si et seulement s'il est racine du polynôme caractéristique de u (resp. de A).

Remarques 3

- **(1)** Cette fois-ci, le spectre de u ou de A est exactement l'ensemble des racines du polynôme caractéristique.
- **(2)** On retrouve, puisque le polynôme caractéristique est de degré n, que u ou A ne peuvent avoir plus de n valeurs propres distinctes.
- **(3)** **Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ avec n impair, on en déduit que u ou A admet toujours au moins une valeur propre.**
- **(4)** Le théorème précédent donne une méthode pratique pour obtenir les valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice : il suffit d'exprimer le polynôme caractéristique et de trouver ses racines.

Exemple 4

Déterminer les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 9 – *Polynôme caractéristique et spectre d'une matrice triangulaire*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire de coefficients diagonaux $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et de polynôme caractéristique χ_A.

Alors :
$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sp}(A) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

Définition 4 – *Ordre de multiplicité d'une valeur propre*

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice. On note χ_u et χ_A les polynômes caractéristiques de u et de A.
On appelle *ordre de multiplicité* d'une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ de u (resp. de A) son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique de u (resp. de A).

Exercice 5 – *Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique*

Montrer que deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.
En déduire que deux matrices semblables ont mêmes valeurs propres et avec les mêmes multiplicités.

Proposition 10 – *Expressions du déterminant et de la trace en fonction des valeurs propres*

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice. On note χ_u et χ_A les polynômes caractéristiques de u et de A.
On suppose que χ_u (resp. χ_A) est scindé sur $\mathbb{K}$ et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de u (resp. de A) comptées avec leurs ordres de multiplicité. Alors :
$$\mathrm{Tr}(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{et} \quad \det(u) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \left(\text{resp. } \mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{et} \quad \det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

Remarque Autrement dit, pour un endomorphisme ou une matrice, la trace est égale à la somme des valeurs propres et le déterminant au produit des valeurs propres, ces dernières étant dans les deux cas comptées avec leurs ordres de multiplicité.
Mais attention, ce résultat n'est valable que lorsque le polynôme caractéristique est scindé, ce qui est toujours le cas si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

EXEMPLE 6

Pour la matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivante, étudier si la trace est égale à la somme des valeurs propres comptées avec leurs ordres de multiplicité.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Reprendre l'étude en considérant A comme une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

EXERCICE 7 – *Valeurs propres complexes d'une matrice réelle*

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme à coefficients réels.
   Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est racine de P alors $\overline{\lambda}$ l'est aussi.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle.
   Déduire de la question précédente que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre complexe de A de multiplicité p alors $\overline{\lambda}$ est également valeur propre de A de multiplicité p.
3. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle vérifiant $M^2 + I_n = 0$.
   Déterminer les valeurs propres complexes de M et en déduire $\mathrm{Tr}(M)$ et $\det(M)$.

PROPOSITION 11 – *Dimension d'un sous-espace propre et multiplicité*

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice.
Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u (resp. de A) de multiplicité $m(\lambda)$ alors :

$$1 \leqslant \dim(E_\lambda(u)) \leqslant m(\lambda) \qquad (\text{resp. } 1 \leqslant E_\lambda(A) \leqslant m(\lambda))$$

PROPOSITION 12 – *Valeurs propres simples*

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice.
Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre simple de u (resp. de A), alors le sous-espace propre associé est de dimension 1.

II. ENDOMORPHISMES ET MATRICES DIAGONALISABLES

Dans ce qui suit, E est supposé de dimension finie égale à n.

II. 1. DIAGONALISATION

DÉFINITION 5 – *Endomorphisme et matrice diagonalisable*

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice.

- On dit que u est *diagonalisable* s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.
- On dit que A est *diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale et une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ inversible telles que $P^{-1}AP = D$.

REMARQUE Si A est la matrice d'un endomorphisme u alors A est diagonalisable si et seulement u est diagonalisable. En particulier, une matrice A est diagonalisable si et seulement si son endomorphisme canoniquement associé est diagonalisable.

Exercice 8

On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable. Il existe donc une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale et une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ inversible telles que $P^{-1}AP = D$.
Montrer que les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A comptées avec leurs multiplicités.

Proposition 13 – *Diagonalisation et éléments propres*

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) u est diagonalisable.

(2) Il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.

(3) On a $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} E_\lambda(u)$.

II. 2. Critères de diagonalisabilité

Théorème 2 – *Caractérisation de la diagonalisabilité des endomorphismes et matrices*

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice.
Alors u (resp. A) est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à n, c'est-à-dire si :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = n \qquad \left(\text{resp. } \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(A)} \dim E_\lambda(A) = n\right)$$

Exercice 9 – *Matrice n'ayant qu'une seule valeur propre*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice ne possédant qu'une seule valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$.
Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $A = \lambda I_n$.

Un résultat similaire pourrait être énoncé pour un endomorphisme.

Théorème 3 – *Caractérisation de la diagonalisabilité avec le polynôme caractéristique*

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice.
Alors u (resp. A) est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à l'ordre de multiplicité de cette valeur propre.

Proposition 14 – *Une condition suffisante de diagonalisabilité*

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice.
Si u (resp. A) possède n valeurs propres distinctes alors u (resp. A) est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension 1.

MÉTHODE – *Diagonalisation d'une matrice*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice. On souhaite savoir si elle est diagonalisable et la diagonaliser le cas échéant.

(1) On commence par déterminer les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ de A.

- Si la matrice A est triangulaire, ses valeurs propres se lisent directement sur sa diagonale ;
- Sinon, on calcule son polynôme caractéristique $\lambda \mapsto \det(\lambda I_n - A)$ et on détermine ses racines.

(2) On détermine des bases des sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ de A en résolvant, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, les systèmes $AX = \lambda X$ pour λ dans $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$.

(3) On utilise un des critères de diagonalisabilité pour savoir si A est diagonalisable.

(4) Dans le cas où A est diagonalisable, diagonaliser A consiste à :

- Donner la matrice de passage P de la base de départ vers une base formée de vecteurs propres de A. On constitue cette base en concaténant les bases des sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ trouvées à l'étape **(2)**.
- Donner la matrice D diagonale vérifiant $P^{-1}AP = D$. Les éléments diagonaux de D sont les valeurs propres de A énumérées avec leurs ordres de multiplicité.

  REMARQUE Les valeurs propres de A sur la diagonale de D apparaissent dans le même ordre que celui utilisé pour concaténer les bases des sous-espaces propres de A.

EXEMPLES 10

Étudier la diagonalisabilité des matrices suivantes et les diagonaliser le cas échéant :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -12 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

II. 3. DIAGONALISATION ET POLYNÔMES ANNULATEURS

THÉORÈME 4 – *Théorème de Cayley-Hamilton*

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice.
Alors les polynômes caractéristiques χ_u et χ_A de u et A sont des polynômes annulateurs de u et A respectivement, c'est-à-dire que :

$$\chi_u(u) = 0 \qquad \text{et} \qquad \chi_A(A) = 0$$

THÉORÈME 5 – *Diagonalisabilité et polynômes annulateurs*

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice.
Alors u (resp. A) est diagonalisable si et seulement si u (resp. A) admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

EXEMPLES 11

(1) En dimension finie, montrer que tout projecteur et toute symétrie de E est diagonalisable.

(2) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice vérifiant $A^3 = I_n$, établir que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Remarque On peut en faire préciser le **Théorème 5** et prouver que si $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ est un endomorphisme et $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice alors u (resp. A) est diagonalisable si et seulement si u (resp. A) admet

$$\prod_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} (\mathrm{X} - \lambda) \qquad \left(\text{resp. } \prod_{\lambda \in \mathrm{sp}(\mathrm{A})} (\mathrm{X} - \lambda)\right)$$

pour polynôme annulateur.

Proposition 15 – *Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit*

Soient $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme et F un sous-espace vectoriel de E stable par u.
Si u est diagonalisable alors l'endomorphisme u_{F} induit sur F par u est également diagonalisable.

III. Endomorphismes et matrices trigonalisables

Dans ce qui suit, E est supposé de dimension finie égale à n.

Définition 6 – *Endomorphisme et matrice trigonalisable*

Soient $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme et $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice.

- On dit que u est *trigonalisable* s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.
- On dit que A est *trigonalisable* si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire s'il existe une matrice $\mathrm{T} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure et une matrice $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ inversible telles que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{T}$.

Remarques 4

(1) Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
La matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ est triangulaire supérieure si et seulement si :
$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \quad u(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i)$$

(2) Si A est la matrice d'un endomorphisme u alors A est trigonalisable si et seulement u est trigonalisable.
En particulier, une matrice A est trigonalisable si et seulement si son endomorphisme canoniquement associé est trigonalisable.

(3) On peut montrer que sur la diagonale de T figurent les valeurs propres de A énumérées avec leurs ordres de multiplicité.

Théorème 6 – *Caractérisation de la trigonalisabilité*

Soient $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme et $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice.
Alors u (resp. A) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.

Proposition 16 – *Le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tout endomorphisme de E et toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Méthode – *Trigonalisation d'une matrice*

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice. On souhaite savoir si elle est trigonalisable et la trigonaliser le cas échéant.

(1) On commence par calculer le polynôme caractéristique $\lambda \longmapsto \det(\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{A})$ de A et on étudie s'il est scindé afin de savoir si A est trigonalisable.

(2) Dans le cas où A est trigonalisable, en notant a l'endomorphisme canoniquement associé à A, on construit une base dans laquelle la matrice de a est triangulaire supérieure.

- On recherche les valeurs propres de A et on détermine une base des sous-espaces propres associés. En concaténant ces bases, on définit une sous-famille libre $\mathscr{F}$ dans laquelle le « début » de la matrice de a est diagonal et donc triangulaire supérieur.
- On complète la famille libre $\mathscr{F}$ en une base $\mathscr{B}$ avec des vecteurs permettant d'assurer que la matrice de a dans cette base est triangulaire supérieure.
- On donne la matrice de passage P de la base de départ vers la base $\mathscr{B}$.
- On exprime la matrice T triangulaire supérieure vérifiant $P^{-1}AP = T$.

Exemple 12

Étudier si la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ est trigonalisable et la trigonaliser le cas échéant.

IV. Applications

IV. 1. Calcul des puissances d'une matrice

Méthode – *Calcul des puissances d'une matrice par diagonalisation (ou trigonalisation)*

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice dont on cherche à calculer les puissances A^k pour $k \in \mathbb{N}$. On suppose que la matrice A est diagonalisable.

(1) On explicite $P \in GL_n(\mathbb{K})$ inversible et $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que $P^{-1}AP = D$ *i.e.* $A = PDP^{-1}$.

(2) On démontre par récurrence que $A^k = PD^kP^{-1}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

(3) Après calcul de P^{-1} et de D^k –ce qui est aisé puisque D est diagonale–, on peut alors exprimer A^k.

Remarque Si A est seulement trigonalisable, la méthode peut être mise en œuvre mais le calcul des puissances de la matrice triangulaire T semblable à A peut poser des difficultés.

Exemple 13

Calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

IV. 2. Suites récurrentes linéaires

Nous étudions des suites récurrentes linéaires d'ordre $p \geqslant 1$ quelconque. Dans cette partie, nous travaillerons sur un exemple mais les méthodes utilisées peuvent facilement s'adpater pour traiter d'autres cas.

Exemple 14

On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par la donnée de u_0, u_1 et u_2 et vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 3u_{n+2} - u_{n+1} - 3u_n = 0$$

Le but est d'exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et des données initiales u_0, u_1 et u_2.

Pour ce faire, on pourra suivre la méthode suivante :

MÉTHODE – *(À savoir adapter à d'autres situations)*

(1) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$$

et on détermine une matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{AU}_n$$

(2) On prouve par récurrence que $\mathrm{U}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{U}_0$ pour $n \in \mathbb{N}$, la matrice colonne U_0 contenant les conditions initiales u_0, u_1 et u_2.

(3) On calcule A^n puis $\mathrm{U}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{U}_0$, ce qui nous donne u_n en observant la première coordonnée de U_n.

IV. 3. SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRE DU PREMIER ORDRE

Nous étudions dans la suite des systèmes différentiels linéaires du premier ordre. Dans cette partie, nous travaillerons sur un exemple mais les méthodes utilisées peuvent facilement s'adpater pour traiter d'autres cas.

EXEMPLE 15

On cherche à déterminer les fonctions $x_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_1'(t) &= 4x_1(t) - 2x_2(t) \\ x_2'(t) &= 3x_1(t) - x_2(t) \end{cases}$$

Le but est donc d'expliciter les fonctions x_1 et x_2.

Pour ce faire, on pourra suivre la méthode suivante :

MÉTHODE – *(À savoir adapter à d'autres situations)*

(1) On pose :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

et on détermine une matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{X}'(t) = \mathrm{AX}(t)$$

(2) On vérifie que A est diagonalisable et on donne $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ et $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ diagonale telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$.

(3) On réalise le changement d'inconnue $\mathrm{X} = \mathrm{PY}$, ou de façon équivalente $\mathrm{Y} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}$, et l'on remarque que cela donne : $\mathrm{X}' = \mathrm{AX} \iff \mathrm{PY}' = \mathrm{APY} \iff \mathrm{Y}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{APY} \iff \mathrm{Y}' = \mathrm{DY}$.

(4) On résout alors le système différentiel diagonal $\mathrm{Y}' = \mathrm{DY}$ ligne par ligne. Plus précisément, en notant y_1 et y_2 les fonctions coordonnées de Y dans la base canonique de $\mathbb{K}^2$, l'identité $\mathrm{Y}' = \mathrm{DY}$ donne :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} y_1'(t) &= \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) &= \lambda_2 y_2(t) \end{cases}$$

d'où l'on déduit immédiatement :

$$\exists (\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad y_1(t) = \mathrm{C}_1 e^{\lambda_1 t} \qquad \text{et} \qquad y_2(t) = \mathrm{C}_2 e^{\lambda_2 t}$$

(5) On conclut en calculant $\mathrm{X} = \mathrm{PY}$. Les constantes C_1 et C_2 peuvent être déterminées si une condition initiale est donnée.