ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Plan du cours

Dans la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Généralités

I. 1. Norme

Définition 1 – *Norme*

Soit E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel.
On appelle *norme sur* E toute application N de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant les quatre propriétés suivantes :

- **Positivité :** $\forall x \in \mathrm{E}, \quad \mathrm{N}(x) \geqslant 0$.
- **Homogénéité :** $\forall x \in \mathrm{E}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \mathrm{N}(\lambda x) = |\lambda|\,\mathrm{N}(x)$.
- **Inégalité triangulaire :** $\forall x, y \in \mathrm{E}, \quad \mathrm{N}(x+y) \leqslant \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y)$.
- **Séparation :** $\forall x \in \mathrm{E}, \quad \mathrm{N}(x) = 0 \implies x = 0$.

Définition 2 – *Espace vectoriel normé*

On appelle *espace vectoriel normé* tout $\mathbb{K}$−espace vectoriel normé muni d'une norme.

Notations

- On note souvent (E, N) le $\mathbb{K}$−espace vectoriel E muni de la norme N. On abrège en E lorsqu'il n'y aucune ambiguïté sur la norme utilisée.
- Une norme est souvent notée $\|\cdot\|$, de sorte que la norme d'un vecteur $x \in \mathrm{E}$ s'écrit $\|x\|$.

Remarques

- En utilisant la propriété d'homogénéité avec $\lambda = 0$, on obtient directement que $\mathrm{N}(0) = 0$.
- Géométriquement, la norme d'un vecteur peut être interprétée comme sa « longueur ».
- L'inégalité triangulaire s'interprète en disant que dans un triangle la longueur d'un côté est inférieure à la somme des deux autres.

Exemples 1 – *Les normes usuelles*

(1) Les trois normes usuelles $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$

Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose :

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \qquad \text{et} \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$$

Ces trois applications sont des normes sur $\mathbb{K}^n$ respectivement appelées « *norme un* », « *norme deux* » et « *norme infinie* ». Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la norme deux est également appelée *norme euclidienne usuelle.*

Remarque Si $\mathrm{E} = \mathbb{K}$, c'est-à-dire si $n = 1$, ces trois normes se confondent et donnent les applications valeur absolue ou module selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

(2) Des normes usuelles sur $\mathscr{C}([a,b], \mathbb{K})$

L'ensemble $\mathscr{C}([a,b], \mathbb{K})$ des fonctions continues sur un segment $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$−espace vectoriel. Pour toute fonction f de $\mathscr{C}([a,b], \mathbb{K})$, on pose :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t, \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t} \qquad \text{et} \qquad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

On peut vérifier que ces trois applications sont des normes sur $\mathscr{C}([a,b], \mathbb{K})$ respectivement appelées « *norme un* », « *norme deux* » et « *norme infinie* ».
On pourrait également introduire une norme p sur $\mathscr{C}([a,b], \mathbb{K})$ pour $p \in [1, +\infty[$.

(3) **La norme infinie $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathscr{B}(\mathrm{X},\mathbb{K})$**

L'ensemble $\mathscr{B}(\mathrm{X},\mathbb{K})$ des fonctions bornées sur un ensemble X et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Pour toute fonction f de $\mathscr{B}(\mathrm{X},\mathbb{K})$, on pose :

$$\left\|f\right\|_\infty = \sup_{x\in\mathrm{X}} \left|f(x)\right|$$

On peut vérifier que cette application est une norme sur $\mathscr{B}(\mathrm{X},\mathbb{K})$ appelée « *norme infinie* ».

(4) **Généralisation des normes usuelles sur un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie**

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n et $\mathscr{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ une base de E.
Pour tout $x \in \mathrm{E}$ dont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ sont notées $(x_1,\ldots,x_n)$, on pose :

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \qquad \text{et} \qquad \|x\|_\infty = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|$$

Ces trois applications sont des normes sur E respectivement appelées « *norme un* », « *norme deux* » et « *norme infinie* ».

Vocabulaire On dit qu'un vecteur x d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel normé $(\mathrm{E},\|\cdot\|)$ est *unitaire* si $\|x\| = 1$.
À tout vecteur $x \in \mathrm{E}$ non nul, on peut associer le vecteur unitaire $x/\|x\|$.

Proposition 1 – *Seconde inégalité triangulaire*

Soit $(\mathrm{E},\|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel normé.

Alors : $$\forall x,y\in\mathrm{E}, \quad \big|\|x\|-\|y\|\big| \leqslant \|x-y\|$$

I. 2. Distance associée à une norme

Définition 3 – *Distance associée à une norme*

Soit $(\mathrm{E},\|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel normé.
On appelle *distance associée à la norme* $\|\cdot\|$ l'application $d : \mathrm{E}^2 \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\forall x,y\in\mathrm{E}, \quad d(x,y) = \left\|y-x\right\|$$

Remarques

- On a en particulier, pour tout $x\in\mathrm{E}$, la relation $\|x\| = d(0,x)$ de sorte que la norme d'un vecteur est sa distance au vecteur nul.
- La distance associée à une norme hérite des propriétés de la norme ainsi que deux nouvelles propriétés inhérentes à sa définition :
  - **Positivité :** $\forall x,y\in\mathrm{E}, \quad d(x,y)\geqslant 0$.
  - **Homogénéité :** $\forall x,y\in\mathrm{E}, \quad \forall\lambda\in\mathbb{K}, \quad d(\lambda x,\lambda y) = |\lambda|\,d(x,y)$.
  - **Inégalité triangulaire :** $\forall x,y,z\in\mathrm{E}, \quad d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$.
  - **Séparation :** $\forall x,y\in\mathrm{E}, \quad d(x,y)=0 \implies x=y$.
  - **Symétrie :** $\forall x,y\in\mathrm{E}, \quad d(x,y)=d(y,x)$.
  - **Invariance par translation :** $\forall x,y,z\in\mathrm{E}, \quad d(x+z,y+z)=d(x,y)$.

Dans toute la suite, $(\mathrm{E},\|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel normé et d désigne la distance associée à la norme $\|\cdot\|$.

I. 3. Boule ouverte, boule fermée, sphère

Définition 4 – *Boule ouverte, boule fermée, sphère*

Soient $a \in \mathrm{E}$ un vecteur de E et $r > 0$ un réel strictement positif.

- On appelle *boule ouverte de centre a et de rayon r*, et l'on note $\mathrm{B}(a, r)$, la partie :

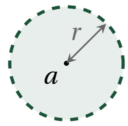
$$\mathrm{B}(a, r) = \{x \in \mathrm{E},\ d(a, x) < r\}$$

- On appelle *boule fermée de centre a et de rayon r*, et l'on note $\mathrm{B}_f(a, r)$, la partie :

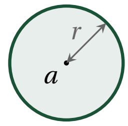
$$\mathrm{B}_f(a, r) = \{x \in \mathrm{E},\ d(a, x) \leqslant r\}$$

- On appelle *sphère de centre a et de rayon r*, et l'on note $\mathrm{S}(a, r)$, la partie :

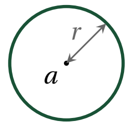
$$\mathrm{S}(a, r) = \{x \in \mathrm{E},\ d(a, x) = r\}$$



$\mathrm{B}(a, r)$



$\mathrm{B}_f(a, r)$



$\mathrm{S}(a, r)$

Remarques

- On remarque que $\mathrm{B}(a, r) \cup \mathrm{S}(a, r) = \mathrm{B}_f(a, r)$.
- Les parties $\mathrm{B}(0, 1)$ et $\mathrm{S}(0, 1)$ sont appelées *boule unité* et *sphère unité*.
  La sphère unité est l'ensemble des vecteurs unitaires.

Exemple 2

Si $\mathrm{E} = \mathbb{R}$ est muni de la norme $|\cdot|$ alors, pour $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, expliciter $\mathrm{B}(a, r)$, $\mathrm{B}_f(a, r)$ et $\mathrm{S}(a, r)$.

Exemple 3 – *Boules unités pour les trois normes usuelles dans $\mathbb{R}^2$*

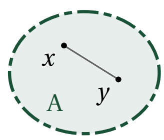
Représenter graphiquement les boules unités pour les normes usuelles $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ dans le plan $\mathbb{R}^2$.

I. 4. Parties convexes

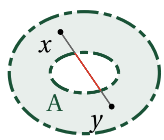
Définition 5 – *Partie convexe*

Soit $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ une partie de E.
On dit que la partie A est *convexe* si :

$$\forall x, y \in \mathrm{A}, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad \lambda x + (1 - \lambda) y \in \mathrm{A}$$



Partie A convexe



Partie A non convexe

Remarque Lorsque λ parcourt $[0, 1]$, le vecteur $\lambda x + (1 - \lambda) y$ parcourt le segment $\left[x, y\right]$ reliant les points x et y. Ainsi A est convexe si et seulement si tout segment reliant deux points de A est inclus dans A.

Exemple 4

Montrer que l'ensemble $\mathrm{C} = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n,\ x_1 + \cdots + x_n = 1\right\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 2 – *Convexité des boules*

Toute boule (ouverte ou fermée) est convexe.

I. 5. Parties, suites et fonction bornées

Définition 6 – *Parties, suites et fonctions bornées*

- Soit $A \subset E$ une partie de E.
  On dit que la partie A est *bornée* s'il existe un réel positif M tel que :
  $$\forall x \in A, \quad \|x\| \leqslant M$$
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.
  On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* s'il existe un réel positif M tel que :
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u_n\| \leqslant M$$
- Soit f une fonction définie sur un ensemble X et à valeurs dans E.
  On dit que la fonction f est *bornée* s'il existe un réel positif M tel que :
  $$\forall x \in X, \quad \|f(x)\| \leqslant M$$

Exemple 5

Montrer que l'ensemble $C = \left\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}_+^n,\ x_1+\cdots+x_n = 1\right\}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$ pour la norme $\|\cdot\|_1$.

II. Suites d'un espace vectoriel normé

II. 1. Suites convergentes

Définition 7 – *Suite convergente*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $\ell \in E$.
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ si :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$$

Vocabulaire

- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément ℓ de E, ℓ est appelé la *limite* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *convergente* s'il existe $\ell \in E$ tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Sinon, on dit qu'elle est *divergente*.

Notation Dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, on utilisera les notations $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Remarques

- Autrement dit, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E converge vers $\ell \in E$ si et seulement si la suite **réelle** $(\|u_n - \ell\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- En terme de distance, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si et seulement si :
  $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad d(u_n,\ell) \leqslant \varepsilon$$

Proposition 3 – *Unicité de la limite*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $\ell_1, \ell_2 \in E$.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et vers ℓ_2 alors $\ell_1 = \ell_2$.

Remarque – *Attention ! A priori*, la convergence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé dépend de la norme avec laquelle on travaille !

PROPOSITION 4 – *Convergence et caractère borné*

Toute suite convergente est bornée.

II. 2. OPÉRATIONS SUR LES SUITES CONVERGENTES

PROPOSITION 5 – *Opérations sur les suites convergentes*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de E et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On se donne ℓ, ℓ' deux éléments de E et α, λ deux éléments de $\mathbb{K}$.

- **Combinaison linéaire :** Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$ alors $\lambda u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda\ell + \ell'$.
- **Produit par une suite numérique :** Si $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$ et si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors $\alpha_n u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha\ell$.
- **Convergence en norme :** Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors $\|u_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|\ell\|$.

II. 3. SUITES EXTRAITES

DÉFINITION 8 – *Suite extraite*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.
On appelle *suite extraite* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante.

PROPOSITION 6 – *Convergence et suites extraites*

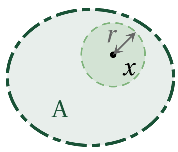
Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente a admet la même limite.

III. TOPOLOGIE D'UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ

III. 1. OUVERTS

DÉFINITION 9 – *Point intérieur à une partie*

Soient $A \subset E$ une partie de E et $x \in E$.
On dit que x est un *point intérieur à* A s'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$.



DÉFINITION 10 – *Intérieur d'une partie*

Soit $A \subset E$ une partie de E.
On appelle *intérieur de* A, noté $\mathring{A}$, l'ensemble des points intérieurs à A.

EXEMPLE 6

> Prouver que tout point intérieur à A appartient à A, c'est-à-dire que $\mathring{A} \subset A$.

EXEMPLE 7

Sur $E = \mathbb{R}$, on pose $A =]0,2]$. Donner des exemples de points qui sont intérieurs à A et d'autres qui ne le sont pas. De façon plus précise, donner $\mathring{A}$.

DÉFINITION 11 – *Partie ouverte*

Soit $U \subset E$ une partie de E.
On dit que la partie U est *ouverte* dans E ou que U est un *ouvert* de E si :

$$\forall x \in U, \quad \exists r > 0, \quad B(x,r) \subset U$$

REMARQUE Autrement dit, une partie U est ouverte si tout point de U est intérieur à U, c'est-à-dire si $U \subset \mathring{U}$, ce qui équivaut à $U = \mathring{U}$ puisque l'autre inclusion est toujours vraie.

EXEMPLES 8

(1) Prouver que les parties $\emptyset$ et E sont des ouverts de E.

(2) Si $E = \mathbb{R}$, la partie $U =]-1,1[$ est-elle ouverte ? L'est-elle si $E = \mathbb{C}$?

PROPOSITION 7 – *Les boules ouvertes sont des parties ouvertes*

Toute boule ouverte est une partie ouverte.

PROPOSITION 8 – *Union et intersection d'ouverts*

- La réunion d'une famille quelconque d'ouverts est un ouvert.
- L'intersection d'une famille **finie** d'ouverts est un ouvert.

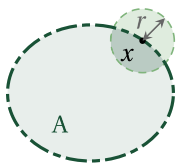
EXEMPLE 9

Sur $E = \mathbb{R}$, expliciter l'intersection des ouverts $]-1/n, 1/n[$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
L'intersection d'une famille quelconque d'ouverts est-elle nécessairement un ouvert ?

III. 2. FERMÉS

DÉFINITION 12 – *Point adhérent à une partie*

Soient $A \subset E$ une partie de E et $x \in E$.
On dit que x est un *point adhérent à* A si pour tout $r > 0$ on a $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$.



DÉFINITION 13 – *Adhérence d'une partie*

Soit $A \subset E$ une partie de E.
On appelle *adhérence de* A, noté $\overline{A}$, l'ensemble des points adhérents à A.

Exemples 10

(1) Montrer que tout point x de A est adhérent à A, c'est-à-dire que $\mathrm{A} \subset \overline{\mathrm{A}}$.

(2) Prouver que si x n'est pas adhérent à A, alors il est intérieur à $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$.

Exemple 11

Sur $\mathrm{E} = \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{A} =]0,2]$. Donner des exemples de points adhérents à A et d'autres qui ne le sont pas. De façon plus précise, donner $\overline{\mathrm{A}}$.

Proposition 9 — *Caractérisation séquentielle des points adhérents*

Soient $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ une partie de E et $x \in \mathrm{E}$.
Le point x est adhérent à A si et seulement si il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.

Vocabulaire — *Partie dense*

On dit qu'une partie $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ de E est *dense* dans E si $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{E}$, c'est-à-dire si tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de A.

Définition 14 — *Partie fermée*

Soit $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ une partie de E.
On dit que la partie F est *fermée* dans E ou que F est un *fermé* de E si son complémentaire $\mathrm{E} \setminus \mathrm{F}$ dans E est un ouvert de E.

Exemples 12

(1) Prouver que les parties $\varnothing$ et E sont des fermés de E.

(2) Si $a \in \mathrm{E}$, montrer que le singleton $\{a\}$ est un fermé de E.

(3) Si $\mathrm{E} = \mathbb{R}$, la partie $[0,1]$ est-elle fermée ?

Remarque — *Attention !*

Il existe des parties à la fois ouvertes et fermées ($\varnothing$ et E par exemple).
Il existe également des parties qui ne sont ni ouvertes ni fermées ($[0,1[$ dans $\mathbb{R}$ par exemple).

Proposition 10 — *Caractérisation des fermés par l'adhérence*

Soit $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ une partie de E.
La partie F est fermée si et seulement si $\overline{\mathrm{F}} = \mathrm{F}$.

Proposition 11 — *Caractérisation séquentielle des fermés*

Soit $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ une partie de E.
La partie F est fermée si et seulement si la limite de toute suite convergente d'éléments de F appartient à F.

Proposition 12 — *Les boules fermées sont des parties fermées*

Toute boule fermée est une partie fermée.

PROPOSITION 13 – *Union et intersection de fermés*

- L'intersection d'une famille quelconque de fermés est un fermé.
- La réunion d'une famille **finie** de fermés est un fermé.

REMARQUE Une sphère $S(a,r)$ est une partie fermée puisque $S(a,r) = B_f(a,r) \bigcap E \backslash B(a,r)$.

III. 3. FRONTIÈRE

DÉFINITION 15 – *Frontière d'une partie*

Soit $A \subset E$ une partie de E.
On appelle *frontière de* A, noté Fr(A), l'ensemble défini par :

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \backslash \mathring{A}$$

EXEMPLE 13

Sur $E = \mathbb{R}$, on pose $A =]0,2]$. Déterminer la frontière Fr(A) de A.

IV. LIMITE D'UNE APPLICATION ENTRE ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Dans cette partie, E, F et G désignent des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels normés dont on notera $\|\cdot\|_E$, $\|\cdot\|_F$, $\|\cdot\|_G$ les normes et d_E, d_F et d_G les distances associées. Enfin, $A \subset E$ désigne une partie de E.

IV. 1. LIMITE

DÉFINITION 16 – *Limite d'une application*

Soient $f : A \to F$ une application, $a \in \overline{A}$ un point adhérent à A et $\ell \in F$.
On dit que f *tend vers* ℓ *en* a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in A, \quad \|x - a\|_E \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad \left\| f(x) - \ell \right\|_F \leqslant \varepsilon$$

Le point ℓ est appelé *limite de l'application* f *en* a.

NOTATION Dans le cas où f tend vers ℓ en a, on utilisera les notations $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ ou $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$ ou encore $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ ou $\ell = \lim\limits_{a} f$.

REMARQUE En terme de distance, l'application f tend vers ℓ en a si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in A, \quad d_E(x,a) \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad d_F(f(x),\ell) \leqslant \varepsilon$$

PROPOSITION 14 – *Caractérisation séquentielle de la limite*

Soient $f : A \to F$ une application, $a \in \overline{A}$ un point adhérent à A et $\ell \in F$.
Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $\lim\limits_{a} f = \ell$

(2) Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A de limite a, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite ℓ.

Proposition 15 – *Unicité de la limite*

Soient $f : \mathrm{A} \to \mathrm{F}$ une application, $a \in \overline{\mathrm{A}}$ un point adhérent à A et $\ell_1, \ell_2 \in \mathrm{F}$.
Si f tend vers ℓ_1 et ℓ_2 en a alors $\ell_1 = \ell_2$.

IV. 2. Opérations sur les limites

Proposition 16 – *Combinaison linéaire*

Soient $f : \mathrm{A} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{A} \to \mathrm{F}$ deux applications, $a \in \overline{\mathrm{A}}$, $(\ell, \ell') \in \mathrm{F}^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Si $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$ et $g \underset{a}{\longrightarrow} \ell'$ alors $\lambda f + g \underset{a}{\longrightarrow} \lambda \ell + \ell'$.

Proposition 17 – *Produit par une application à valeurs dans $\mathbb{K}$*

Soient $f : \mathrm{A} \to \mathrm{F}$ et $\varphi : \mathrm{A} \to \mathbb{K}$ deux applications, $a \in \overline{\mathrm{A}}$, $\ell \in \mathrm{F}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Si $\varphi \underset{a}{\longrightarrow} \lambda$ et $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$ alors $\varphi f \underset{a}{\longrightarrow} \lambda \ell$.

Proposition 18 – *Composition*

Soient $f : \mathrm{A} \to \mathrm{F}$, $g : \mathrm{B} \subset \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ deux applications telles que $f(\mathrm{A}) \subset \mathrm{B}$, $a \in \overline{\mathrm{A}}$, $b \in \overline{\mathrm{B}}$ et $\ell \in \mathrm{G}$.
Si $f \underset{a}{\longrightarrow} b$ et $g \underset{b}{\longrightarrow} \ell$ alors $g \circ f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$.

Remarques – *Cas particuliers intéressants de la composition*

- **Inverse :** En prenant $f : \mathrm{A} \to \mathbb{K}$ ne s'annulant pas et $g : x \in \mathbb{K}^* \subset \mathbb{K} \mapsto 1/x \in \mathbb{K}$, on obtient :
  Si $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{K}^*$ alors $1/f \underset{a}{\longrightarrow} 1/\ell$.
- **Passage à la norme :** Avec $f : \mathrm{A} \to \mathrm{F}$ et $g : x \in \mathrm{F} \mapsto \|x\|_{\mathrm{F}} \in \mathbb{R}$, on obtient :
  Si $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{K}^*$ alors $\|f\|_{\mathrm{F}} \underset{a}{\longrightarrow} \|\ell\|_{\mathrm{F}}$.

V. Continuité d'une application entre espaces vectoriels normés

Dans cette partie, E, F et G désignent des $\mathbb{K}$−espaces vectoriels normés dont on notera $\|\cdot\|_{\mathrm{E}}$, $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$, $\|\cdot\|_{\mathrm{G}}$ les normes et d_{E}, d_{F} et d_{G} les distances associées. Enfin, $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ désigne une partie de E.

V. 1. Continuité

Définition 17 – *Continuité*

Soit $f : \mathrm{A} \to \mathrm{F}$ une application.

- Soit $a \in \mathrm{A}$. On dit que f *est continue en* a si f admet une limite en a. Dans ce cas, cette limite vaut nécessairement $f(a)$.
  Ainsi, f est continue en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathrm{A}, \quad \|x - a\|_{\mathrm{E}} \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad \big\|f(x) - f(a)\big\|_{\mathrm{F}} \leqslant \varepsilon$$

- On dit que f *est continue sur* A si elle est continue en tout point de A.

Proposition 19 – *Caractérisation séquentielle de la continuité*

Soient $f : \mathrm{A} \to \mathrm{F}$ une application et $a \in \mathrm{A}$.
Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(1) f est continue en a.

(2) Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A de limite a, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $f(a)$.

Exemple 14

Prouver que l'application norme $\varphi : x \in \mathrm{E} \mapsto \|x\|_{\mathrm{E}} \in \mathbb{R}$ est continue.

Proposition 20 – *Opérations sur les applications continues*

- Toute combinaison linéaire d'applications continues est continue.
- Le produit d'une application continue avec une application continue à valeurs dans $\mathbb{K}$ est continu.
- Toute composée d'applications continues est continue.

Notation L'ensemble des applications continues de A dans F est donc un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}-$espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathrm{A},\mathrm{F})$ des applications de A dans F. On le note $\mathscr{C}(\mathrm{A},\mathrm{F})$.

V. 2. Applications lipschitziennes

Définition 18 – *Application lipschitzienne*

Soit $f : \mathrm{A} \to \mathrm{F}$ une application.
On dit que f est *lipschitzienne* s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x, y \in \mathrm{A}, \quad \left\|f(x) - f(y)\right\|_{\mathrm{F}} \leqslant k\left\|x - y\right\|_{\mathrm{E}}$$

On dit alors que f est *lipschitzienne de rapport* k ou $k-$*lipschitzienne*.

Proposition 21 – *Les applications lipschitziennes sont continues*

Toute application lipschitzienne est continue.

Remarque 1 Une application continue n'est pas forcément lipschitzienne comme le montre l'exemple de la fonction racine carrée définie sur $\mathbb{R}_+$ qui n'est pas lipschitzienne.

Exemples 15

(1) Montrer que l'application norme $\varphi : x \in \mathrm{E} \mapsto \|x\|_{\mathrm{E}} \in \mathbb{R}$ est $1-$lipschitzienne et donc continue.

(2) Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on s'intéresse à l'application p_i qui à un vecteur de $\mathbb{K}^n$ associe sa $i-$ème coordonnée dans la base canonique :

$$p_i : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_i \end{array}$$

On munit $\mathbb{K}^n$ d'une des trois normes usuelles et on la note $\|\cdot\|$.
Prouver que p_i est continue en justifiant qu'elle est $1-$lipschitzienne.

(3) En déduire que les applications suivantes sont continues :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & x_1+\dots+x_n \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & x_1x_2\cdots x_n \end{array}$$

V. 3. Continuité et images réciproques

Proposition 22 – *Applications continues et images réciproques*

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors :

- Les ensembles $\{x \in \mathrm{E},\ f(x) = 0\}$ et $\{x \in \mathrm{E},\ f(x) \geqslant 0\}$ sont des fermés de E.
- L'ensemble $\{x \in \mathrm{E},\ f(x) > 0\}$ est un ouvert de E.

Remarques

- Les trois ensembles considérés dans ce résultat sont des images réciproques par f de sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Plus précisément, ce sont respectivement $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$ et $f^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$.
- Il est important que l'application soit définie sur E tout entier.
  Par exemple $f : x \in \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R} \mapsto e^x \in \mathbb{R}$ est bien continue mais $f^{-1}(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+$ qui n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.

Exemples 16

(1) Dans $\mathbb{R}^2$, prouver que le demi-plan $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geqslant 0\}$ est un fermé.

(2) Montrer que l'ensemble $\mathrm{C} = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1+\dots+x_n = 0\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$.

VI. Espaces vectoriels normés de dimension finie

Dans cette partie, E, F désignent des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels normés dont on notera $\|\cdot\|_{\mathrm{E}}$ et $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ les normes et d_{E} et d_{F} les distances associées. Enfin, $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ désigne une partie de E.

VI. 1. Équivalence des normes en dimension finie

Les notions de convergence d'une suite et de limite et continuité d'une application sur des espaces vectoriels normés dépend *a priori* des normes utilisées sur ces espaces. En dimension finie, on peut prouver que ces notions sont indépendantes de la norme choisie, comme le précise le résultat suivant, dont la démonstration est admise.

Théorème 1 – *Équivalence des normes en dimension finie*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments E avec E **de dimension finie** et $\ell \in \mathrm{E}$.
Si l'on dispose de deux normes sur E et si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ pour l'une des deux normes, alors elle converge aussi vers ℓ pour l'autre.

Remarque – *Conséquence importante*

Toutes les notions étudiées précédemment pour lesquelles on dispose d'une caractérisation séquentielle, c'est-à-dire celles qui peuvent être entièrement définies par la notion de convergence d'une suite, sont également indépendantes du choix de la norme.

Ainsi, **en dimension finie**, les notions de point adhérent à une partie, d'adhérence d'une partie, de partie fermée, de point intérieur à une partie, d'intérieur d'une partie, de partie ouverte, de frontière d'une partie, de limite et continuité d'une application ne dépendent pas de la ou des norme(s) choisie(s) sur les espaces vectoriels normés concernés.

Remarque **En dimension finie**, on peut donc choisir les normes qui nous arrangent sur les espaces vectoriels normés sur lesquels on travaille. Très souvent, la norme infinie se révèle pratique.

Exercice 17 – *Équivalence des normes*

En supposant E de dimension finie et en considérant $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur E, montrer qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \|x\|_1 \leqslant \alpha \|x\|_2$$

VI. 2. Utilisation des coordonnées dans une base

Proposition 23 – *Convergence d'une suite et suites coordonnées*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E avec E de dimension finie p et $\mathscr{B} = \left(e_1, \dots, e_p\right)$ une base de E.
On appelle *suites coordonnées* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans la base $\mathscr{B}$ les suites scalaires notées $(u_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (u_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=1}^{p} u_n^{(k)} e_k$$

Étant donné $\ell = \sum_{k=1}^{p} \ell_k e_k \in \mathrm{E}$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

(2) Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, la suite scalaire $(u_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_k.

Remarque Ainsi, en dimension finie, pour prouver la convergence d'une suite vectorielle, on peut se ramener à la convergence de ses suites coordonnées qui sont des suites scalaires.

Exemple 18

On définit une suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & e^{-n} \\ e^{-2n} & 1 - e^{-n} \end{pmatrix}$$

Étudier la convergence de la suite matricielle $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

Proposition 24 – *Applications coordonnées*

Soit $f : \mathrm{A} \to \mathrm{F}$ une application avec F de dimension finie p et $\mathscr{B} = \left(w_1, \dots, w_p\right)$ une base de F.
On appelle *applications coordonnées* de f dans la base $\mathscr{B}$ les applications de A dans $\mathbb{K}$ notées $f_1, \dots, f_p$ qui vérifient :

$$\forall x \in \mathrm{A}, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{p} f_k(x) w_k$$

Pour $a \in \mathrm{A}$, et $\ell = \sum_{k=1}^{p} \ell_k w_k \in \mathrm{E}$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) L'application f admet ℓ comme limite en a.

(2) Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, l'application f_k tend vers ℓ_k en a.

De plus :

- L'application f est continue en a si et seulement si les applications $f_1, \dots, f_p$ sont continues en a.
- L'application f est continue sur A si et seulement si les applications $f_1, \dots, f_p$ sont continues sur A.

VI. 3. Applications continues sur une partie fermée bornée

En première année, il a été vu qu'une fonction continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes. Le résultat suivant propose une généralisation.

Théorème 2 – *Théorème des bornes atteintes*

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ où $A \subset E$ est une partie non vide fermée et bornée de E avec E **de dimension finie**.
Si f est continue alors f est bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'il existe a et b dans A tels que :

$$f(a) = \inf_{x\in A} f(x) \qquad \text{et} \qquad f(b) = \sup_{x\in A} f(x)$$

VI. 4. Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales

Théorème 3 – *Continuité des applications linéaires en dimension finie*

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ une application linéaire avec E **de dimension finie**.
Alors il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\|_F \leqslant C\,\|x\|_E$$

L'application linéaire u est alors C−lipschitzienne et donc continue.

Remarque Seul l'espace E de départ est supposé de dimension finie, cette hypothèse étant cruciale.

Exemples 19

(1) Si E est de dimension finie n et muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ alors, pour $i \in [\![1, n]\!]$, on introduit l'application φ_i qui à tout vecteur de E associe sa i−ème coordonnée dans la base $\mathscr{B}$:

$$\varphi_i : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x_1e_1 + \cdots + x_ne_n & \longmapsto & x_i \end{array}$$

Prouver que φ_i est continue.

(2) Montrer que les applications suivantes sont continues :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & {}^tA \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A) \end{array}$$

Définition 19 – *Fonction polynomiale*

Soit $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ une application.
On dit que f est polynomiale s'il existe une partie finie I de $\mathbb{N}^n$ et des scalaires $(\lambda_{k_1,\ldots,k_n})_{(k_1,\ldots,k_n)\in I}$ tels que :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in I} \lambda_{k_1,\ldots,k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$$

Exemple L'application $f : (x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mapsto x^2y - 3yz + 2x^3yz^2 \in \mathbb{K}$ est polynomiale.

Proposition 25 – *Continuité des applications polynomiales*

Toute application polynomiale est continue

Proposition 26 – *Continuité du déterminant*

L'application det qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associe son déterminant $\det \mathrm{M} \in \mathbb{K}$ est continue.

Exemple 20

En déduire que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 20 – *Application multilinéaire*

Soient $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_p$ des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et $u : \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_p \to \mathrm{F}$ une application.
On dit que u est *$p-$linéaire* si, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ et tout $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_p$, l'application partielle :

$$u_i : \begin{array}{ccc} \mathrm{E}_i & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ x & \longmapsto & u(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_p) \end{array}$$

est linéaire.

Remarque – *Norme sur un espace produit*

Soient $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_p$ des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels normés. On peut alors définir une norme sur l'espace vectoriel produit $\mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_p$ en posant :

$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_p, \quad \left\| (x_1, \ldots, x_p) \right\| = \max_{k \in [\![1, p]\!]} \|x_k\|_{\mathrm{E}_k}$$

Théorème 4 – *Continuité des applications multilinéaires*

Soient $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_p$ des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels normés **de dimension finie** et $u : \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_p \to \mathrm{F}$ une application que l'on suppose $p-$linéaire.
Alors u est continue.

Exemples 21

(1) Prouver que l'application produit matriciel $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathrm{AB} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue.

(2) En déduire que l'application $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathrm{A}^2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue.

(3) Soit $(\mathrm{A}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui converge vers $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Prouver que les suites $(\mathrm{A}_p^2)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Tr}(\mathrm{A}_p))_{p \in \mathbb{N}}$ convergent et donner leurs limites.