SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Plan du cours

Dans la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. On considère dans ce chapitre des suites et séries à valeurs dans le $\mathbb{K}-$espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ des fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

I. Modes de convergence d'une suite de fonctions

On introduit dans cette partie différents modes de convergence pour les suites de fonctions à savoir les convergences simple et uniforme.

I. 1. Convergence simple

Définition 1 – *Convergence simple*

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ et $f\in\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers* f si, pour tout $x\in\mathrm{I}$, on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ dans $\mathbb{K}$.

Vocabulaire

- La fonction limite f est appelée la *limite simple* de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement* s'il existe une fonction $f\in\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ telle que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.

Remarques

- Autrement dit, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers* f si :

$$\forall x\in\mathrm{I},\quad \forall\varepsilon>0,\quad \exists\, n_0\in\mathbb{N},\quad \forall n\geqslant n_0,\quad \left|f_n(x)-f(x)\right|\leqslant\varepsilon$$

- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* $\mathrm{J}\subset\mathrm{I}$ si la suite $(f_{n|_\mathrm{J}})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.
- Par unicité de la limite d'une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$, la limite simple, si elle existe, est unique.

Exemples 1

(1) Étude de la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad f_n:\begin{array}{rcl}[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & x^n\end{array}$$

(2) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad f_n(x)=\begin{cases}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } x\in[0,n[\\ 0 & \text{si } x\in[n,+\infty[\end{cases}$$

Étude de la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Remarques

- Certaines propriétés ne sont pas « stables » par passage à la limite simple. Les deux exemples précédents illustrent le fait qu'une limite simple de fonctions continues n'est pas nécessairement continue et qu'une limite simple de fonctions bornées n'est pas nécessairement bornée.
- Au niveau des opérations algébriques, la convergence simple est stable par combinaison linéaire et produit : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement respectivement vers f et g et si $\lambda\in\mathbb{K}$ alors $(\lambda f_n+g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_ng_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement respectivement vers $\lambda f+g$ et fg.

I. 2. Convergence uniforme

Définition 2 – *Convergence uniforme*

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ et $f\in\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f si :

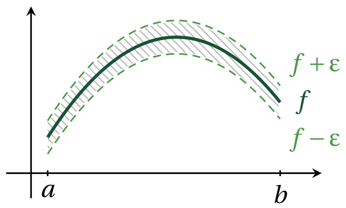
$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\, n_0\in\mathbb{N},\quad \forall n\geqslant n_0,\quad \forall x\in\mathrm{I},\quad \left|f_n(x)-f(x)\right|\leqslant\varepsilon$$

Vocabulaire

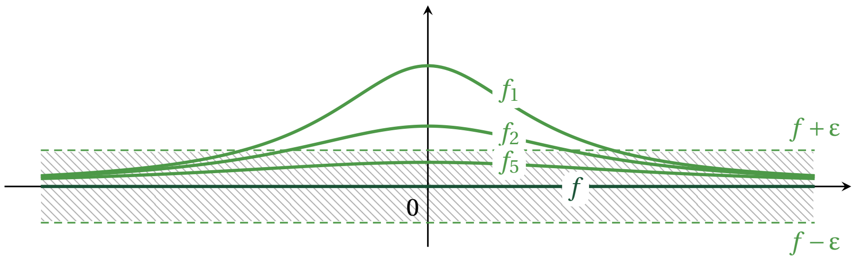
- La fonction limite f est appelée la *limite uniforme* de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément* s'il existe une fonction $f\in\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ telle que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

Remarques

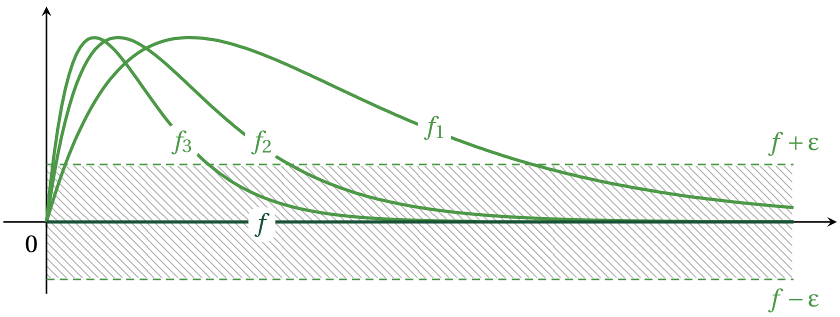
- Le différence entre la convergence simple et la convergence uniforme tient à l'ordre des quantificateurs. Il faut comprendre que pour une convergence simple, le rang n_0 dépend de $x\in\mathrm{I}$ alors que pour une convergence uniforme, ce rang n_0 peut être choisi indépendamment de $x\in\mathrm{I}$.
- Pour comprendre graphiquement la notion de convergence uniforme, supposons par exemple que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur un segment $[a,b]$. La définition de la convergence uniforme signifie qu'étant donné $\varepsilon>0$, il existe un rang n_0 à partir duquel le graphe de toutes les fonctions f_n sont dans le « tube » délimité par les fonctions $f+\varepsilon$ et $f-\varepsilon$.



- Afin de mieux appréhender la différence entre convergence simple et convergence uniforme, on donne ci-après une illustrations de deux cas où il y a convergence simple vers la fonction nulle $f = 0$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En revanche, dans le premier cas, il y a convergence uniforme alors que dans le second cas, il n'y pas convergence uniforme.



Convergence uniforme



Pas de convergence uniforme

- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* $J \subset I$ si la suite $(f_{n|_J})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.

PROPOSITION 1 – *Convergence uniforme implique convergence simple*

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}(I,\mathbb{K})$ et $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{K})$.
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.

REMARQUES 1

- Cela permet de justifier l'unicité de la limite uniforme.
- La réciproque est fausse ! Voir plus loin pour un exemple.

PROPOSITION 2 – *Condition suffisante de convergence uniforme*

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}(I,\mathbb{K})$ et $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{K})$.
Supposons qu'il existe une suite réelle positive $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 et vérifiant, à partir d'un certain rang, la majoration :

$$\forall x \in I, \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$$

Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

REMARQUE – *Très important !*

La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne doit pas dépendre de x.

MÉTHODE – *Plan d'étude d'une suite de fonctions*

(1) On commence par étudier la convergence simple.
On fixe donc $x \in I$ et on étudie la convergence de la suite numérique $f_n(x)$. Il faut parfois faire des disjonctions de cas selon les valeurs de x.

(2) **En cas de convergence simple vers f, on poursuit avec l'étude de la convergence uniforme.**
Pour montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I, on peut essayer d'utiliser la **Proposition 2**, c'est-à-dire essayer de trouver une suite réelle positive $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 vérifiant à partir d'un certain rang la majoration :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$$

Si ce n'est pas évident directement, et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut faire une étude de la fonction $|f_n - f|$ pour trouver son maximum sur l'intervalle I et ainsi la majorer.

(3) **Pour montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur** I.
Par négation de la définition de la convergence uniforme, il suffit de trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I telle que la suite $(|f_n(x_n) - f(x_n)|)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.
En l'absence de convergence uniforme sur tout I, on peut parfois établir la convergence uniforme sur des parties $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ de I.

Exemples 2

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ en posant $f_n(x) = 1/(x^2+n)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
Étudier les convergences simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}$.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ en posant $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.
Étudier les convergences simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}_+$.

(3) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n sur $[0,1]$ en posant $f_n(x) = x^n$ pour $x \in [0,1]$.
Étudier les convergences simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$.

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n sur $[0,1]$ en posant $f_n(x) = nx(1-x)^n$ pour $x \in [0,1]$.

1. Étudier les convergences simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$.
2. Prouver qu'il y a convergence uniforme sur tout segment de la forme $[a,1]$ avec $a \in]0,1]$.
   Y a-t-il convergence uniforme sur $]0,1]$?

Remarques – *Opérations sur la convergence uniforme*

- La convergence uniforme est stable par combinaison linéaire : si les suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément respectivement vers f et g et si $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $(\lambda f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\lambda f + g$.
- Contrairement à la convergence simple, la convergence uniforme n'est pas stable par produit : la suite de fonctions $(x \mapsto x + 1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}_+$converge uniformément vers l'identité sur $\mathbb{R}_+$ mais son carré se converge pas uniformément.

Rappel – *Norme infinie sur $\mathscr{B}(\mathrm{I},\mathbb{K})$*

L'ensemble $\mathscr{B}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ des fonctions bornées sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel que l'on peut munir de la norme dite *de la convergence uniforme* ou *norme infinie* $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall f \in \mathscr{B}(\mathrm{I},\mathbb{K}), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathrm{I}} |f(x)|$$

Proposition 3 – *Convergence uniforme*

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ et $f \in \mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$.
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si et seulement s'il existe un entier $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}$ la fonction $f_n - f$ est bornée et $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Proposition 4 – *Convergence uniforme et norme de la convergence uniforme*

Soit $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{B}(\mathrm{I},\mathbb{K})$.
La suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément si et seulement si elle converge dans l'espace vectoriel normé $(\mathscr{B}(\mathrm{I},\mathbb{K}),\|\cdot\|_\infty)$.

II. Régularité de la limite d'une suite de fonctions

II. 1. Limite et continuité

Nous avons vu qu'une limite simple de fonctions continues n'est pas nécessairement continue. Ce « défaut » est corrigé avec la convergence uniforme.

Théorème 1 – *Continuité d'une limite*

Soient $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ et $f\in\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$. On suppose que :

- Les fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont continues sur I;
- La suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I (ou sur tout segment de I).

Alors f est continue sur I.

Remarques

- Ce théorème peut être utilisé pour montrer qu'une convergence n'est pas uniforme si l'on constate qu'une limite simple de fonctions continues n'est pas continue. On peut repenser à l'exemple de la suite de fonctions $(x\in[0,1]\mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- La continuité de f en a équivaut à $f(x)$ tend vers $f(a)$ lorsque x tend vers a. Le résultat que l'on vient d'énoncer peut donc s'écrire :

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) \qquad (\star)$$

ce qui peut s'interpréter comme un résultat d'interversion de limites.
Attention, une interversion de limite n'a absolument rien d'évident! Par exemple, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to1^-} x^n = 1 \quad \text{alors que} \quad \lim_{x\to1^-}\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$$

On se demande maintenant si le résultat d'interversion de limites $(\star)$ peut être étendu au cas où a est une extrémité de I, plus précisément au cas où $a\in\bar{\mathrm{I}}\setminus\mathrm{I}$ ou $a=\pm\infty$ si I est une demie-droite ou $\mathbb{R}$ entier.

Théorème 2 – *Théorème de la double limite*

Soient $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$, $f\in\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ et a une extrémité de I. On suppose que :

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite finie ℓ_n en a;
- La suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I (ou sur un voisinage de a).

Alors la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, la fonction f admet une limite en a et :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to+\infty} \ell_n$$

Remarque Là encore, ce théorème peut être utilisé pour montrer qu'une convergence n'est pas uniforme. Par exemple, la suite de fonctions $(x\in[0,1]\mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f valant 0 sur $[0,1[$ et 1 en 1 et la convergence n'est pas uniforme puisque :

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to+\infty}\ell_n \qquad \text{avec} \qquad \ell_n = \lim_{x\to1^-} f_n(x) = 1$$

II. 2. Intégration

Théorème 3 – *Intégration d'une limite*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}([a,b],\mathbb{K})$. On suppose que :

- Les fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f sont continues sur $[a,b]$;
- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Alors :

$$\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarques

- L'hypothèse f continue sur $[a,b]$ est superflue puisque f est nécessairement continue en tant que limite uniforme de fonctions continues.
- Le résultat précédent peut s'écrire :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

  Il donne ainsi une condition suffisante pour pouvoir intervertir une limite et une intégrale, ce qui n'a rien d'évident *a priori*, comme le montre l'exemple qui suit.

Exemple 4

Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in[0,1]$, on pose $f_n(x)=n^2x^n(1-x)$. Étudier si la relation suivante est satisfaite :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

II. 3. Dérivation

Théorème 4 – *Dérivation d'une limite*

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ et $f,h\in\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$. On suppose que :

- Les fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;
- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I ;
- La suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers h sur I (ou sur tout segment de I).

Alors la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I avec $f'=h$.
De plus, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment de I.

Remarques

- Ce résultat peut également s'écrire :

$$\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to+\infty} f_n'$$

  et s'apparente donc à une condition suffisante pour pouvoir intervertir une dérivée et une limite, ce qui, encore une fois, n'a rien d'évident *a priori*.
- Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ converge uniformément vers une fonction f alors f n'est pas nécessairement $\mathscr{C}^1$ comme le montre l'exemple qui suit.

EXEMPLE 5

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = \sqrt{x + n^{-1}}$.
Prouver que la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction qui n'est pas $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

II. 4. DÉRIVATION D'ORDRE SUPÉRIEUR

THÉORÈME 5 – *Dérivation d'ordre supérieur d'une limite*

Pour $k \geqslant 1$, soient $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ et $h_0, \ldots, h_k \in \mathscr{F}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$. On suppose que :

- Les fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de classe $\mathscr{C}^k$ sur I ;
- Pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, la suite $(f_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers h_j sur I ;
- La suite $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers h_k sur I (ou sur tout segment de I).

Alors la limite simple $f = h_0$ de la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I avec :

$$\forall j \in [\![0, k]\!], \quad f^{(j)} = h_j$$

III. MODES DE CONVERGENCE D'UNE SÉRIE DE FONCTIONS

Nous étudions dans cette partie des séries dont les termes généraux sont des fonctions de $\mathscr{F}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$. Une série n'étant rien d'autre qu'une suite, nous allons pouvoir nous appuyer sur les deux parties précédentes.

III. 1. CONVERGENCES SIMPLE ET UNIFORME

DÉFINITION 3 – *Série de fonctions, convergence simple, convergence uniforme*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle *somme partielle d'ordre n* la fonction S_n définie sur I par :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{S}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$$

- On appelle *série de fonctions de terme général* u_n la suite de fonctions $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On la note $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ ou $\sum u_n$.
- On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ *converge simplement* si, pour tout $x \in \mathrm{I}$, la série $\sum u_n(x)$ converge.
Dans ce cas, on appelle *somme de la série*, notée S, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, *reste d'ordre n*, noté R_n, les fonctions définies sur I par :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{R}_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$$

- On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ *converge uniformément* si la suite de fonctions des sommes partielles $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.

REMARQUES

- On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ *converge simplement* (resp. *uniformément*) *sur* $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ si la série de fonctions $\sum u_{n|_\mathrm{J}}$ converge simplement (resp. uniformément).

- La convergence uniforme d'une série de fonctions implique sa convergence simple, la réciproque n'étant pas vraie en général.
- Par abus de notation, on note parfois une série de fonctions $\sum u_n(x)$ et non pas $\sum u_n$.
  Par exemple, parler de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} e^{-nx}$ sur $\mathbb{R}$ revient rigoureusement à parler de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} (x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-nx})$.

Exemples 6

Étudier la convergence simple des séries de fonctions suivantes :

(1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n+x}$ sur $\mathbb{R}_+$ **(2)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{nx}{n^3+x^2}$ sur $\mathbb{R}_+$

Proposition 5 – *Caractérisation de la convergence uniforme pour les séries de fonctions*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$.
La série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

(1) La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement;

(2) La suite de fonctions $(\mathrm{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses restes converge uniformément vers 0.

Exemples 7

Étudier la convergence uniforme des séries de fonctions étudiées précédemment :

(1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n+x}$ sur $\mathbb{R}_+$ **(2)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{nx}{n^3+x^2}$ sur $\mathbb{R}_+$

Pour le deuxième cas, on montrera qu'il n'y a pas convergence uniforme en minorant convenablement le reste.

III. 2. Convergence normale

On rappelle que le $\mathbb{K}$−espace vectoriel $\mathscr{B}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ des fonctions bornées de I dans $\mathbb{K}$ est muni de la norme de la convergence uniforme notée $\|\cdot\|_\infty$.

Définition 4 – *Convergence normale*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{B}(\mathrm{I},\mathbb{K})$.
On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ *converge normalement* si la série numérique $\sum \|u_n\|_\infty$ converge.

Remarque On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ *converge normalement sur* $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ si la série de fonctions $\sum {u_n}_{|\mathrm{J}}$ converge normalement.

Exemples 8

Étudier la convergence normale des séries de fonctions suivantes. Lorsqu'il n'y a pas convergence normale, on essaiera à restreindre l'intervalle d'étude pour en obtenir.

(1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ sur $\mathbb{R}$

(2) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n+x}$ sur $\mathbb{R}_+$

(3) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{nx}{n^3+x^2}$ sur $\mathbb{R}_+$

Théorème 6 — *Convergence normale implique convergence uniforme*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{B}(\mathrm{I},\mathbb{K})$.
Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur I alors elle converge uniformément sur I.

Remarques

- La réciproque est fausse, comme cela a été vu dans les exemples qui précèdent.
- La preuve montre que la convergence normale implique la convergence absolue en tout point de I.

Proposition 6 — *Condition suffisante de convergence normale*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$.
Supposons qu'il existe une suite réelle positive $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum \alpha_n$ converge et vérifiant, à partir d'un certain rang, la majoration :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad |u_n(x)| \leqslant \alpha_n$$

Alors la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur I.

Remarque — *Très important !*

La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne doit pas dépendre de x.

Méthode — *Techniques d'étude d'une série de fonctions*

- **Convergence simple.**
  On fixe donc $x \in \mathrm{I}$ et on étudie la convergence de la série numérique $\sum u_n(x)$. Il faut parfois faire des disjonctions de cas selon les valeurs de x.
- **Convergence uniforme.**
  Pour montrer que la série de fonctions converge uniformément, il suffit de trouver une suite réelle positive $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 et vérifiant, à partir d'un certain rang, la majoration :
  $$\forall x \in \mathrm{I}, \quad |\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \alpha_n$$
  Ceci assurera en effet que la suite $(\mathrm{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes converge uniformément vers 0.
- **Prouver qu'il n'y a pas convergence uniforme.**
  Il suffit de trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I telle que la suite $(|\mathrm{R}_n(x_n)|)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.
  On peut aussi montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers 0. En effet, si la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément, la suite $(\mathrm{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 de sorte que, par différence, la suite de terme général $u_n = \mathrm{R}_{n-1} - \mathrm{R}_n$ converge uniformément vers 0 également.
  En l'absence de convergence uniforme sur tout I, on peut parfois établir la covergence uniforme sur des parties $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ de I.
- **Convergence normale.**
  En effet, cette dernière implique directement les convergences simple et uniforme. Pour ce faire, on peut exprimer $\|u_n\|_\infty$, à l'aide d'une étude de fonctions si besoin, et étudier la série $\sum \|u_n\|_\infty$.
  Sinon, on peut chercher à utiliser la **Proposition 6** en cherchant une suite réelle positive $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum \alpha_n$ converge et vérifiant, à partir d'un certain rang, la majoration :
  $$\forall x \in \mathrm{I}, \quad |u_n(x)| \leqslant \alpha_n$$
  En l'absence de convergence normale sur tout I, on peut parfois établir la convergence normale sur des parties $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ de I.

IV. Régularité de la somme d'une série de fonctions

IV. 1. Limite et continuité

Théorème 7 – *Continuité d'une somme*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$. On suppose que :

- Les fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont continues sur I ;
- La série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur I (ou sur tout segment de I).

Alors la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue sur I.

Théorème 8 – *Théorème de la double limite*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ et a une extrémité de I. On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n admet une limite finie ℓ_n en a ;
- La série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur I (ou sur un voisinage de a).

Alors la série numérique $\sum \ell_n$ est convergente et :

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$$

IV. 2. Intégration terme à terme

Théorème 9 – *Intégration d'une somme*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}([a,b],\mathbb{K})$. On suppose que :

- Les fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont continues sur $[a,b]$;
- La série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a,b]$.

Alors :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x$$

IV. 3. Dérivation terme à terme

Théorème 10 – *Dérivation d'une somme*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$. On suppose que :

- Les fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;
- La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I ;
- La série de fonctions $\sum u_n'$ converge uniformément sur I (ou sur tout segment de I).

Alors la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'$$

IV. 4. Dérivation terme à terme d'ordre supérieur

Théorème 11 – *Dérivation d'ordre supérieur d'une somme*

Pour $k \geqslant 1$, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$. On suppose que :

- Les fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de classe $\mathscr{C}^k$ sur I ;
- Pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, la série de fonctions $\sum u_n^{(j)}$ converge simplement sur I ;
- La série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge uniformément sur I (ou sur tout segment de I).

Alors la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I avec :

$$\forall j \in [\![0, k]\!], \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(j)}$$

IV. 5. Un exemple : la fonction ζ de Riemann

Exercice 9

On étudie dans cet exercice la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ sur $]\,1, +\infty\,[$.

1. Étudier les convergences simple, uniforme et normale de cette série de fonctions.

Lorsque cela a un sens, on posera :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

2. Prouver que ζ est continue sur $]\,1, +\infty\,[$.
3. Prouver que ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\,1, +\infty\,[$.
4. Étudier la limite de ζ en $+\infty$.
5. Donner un équivalent de ζ en 1^+ et en déduire en particulier sa limite en 1^+.
   On pourra faire une comparaison série – intégrale.