SÉRIES ENTIÈRES

Plan du cours

I. Séries entières 1
- I. 1. Définition 1
- I. 2. Rayon de convergence 2
- I. 3. Opérations sur les séries entières 4

II. Régularité de la somme d'une série entière 5
- II. 1. Continuité 5
- II. 2. Intégration 6
- II. 3. Dérivation 6

III. Développement en série entière 6
- III. 1. Fonctions développables en séries entières 6
- III. 2. Développement en série entière des fonctions usuelles 7
- III. 3. Développements en série entière complexes 8
- III. 4. « Méthode de l'équation différentielle » 9

Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $\overline{\mathbb{R}_+}$ l'ensemble $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ sur lequel on a prolongé la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x < +\infty$.

Notion de borne supérieure sur $\mathbb{R}$ On rappelle que si $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$ est une partie non vide majorée, alors A admet une borne supérieure, notée $\sup \mathrm{A}$. Cette borne supérieure est caractérisée par le fait que, pour tout $x \in \mathrm{A}$, on a $x \leqslant \sup \mathrm{A}$ et par le fait que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in \mathrm{A}$ tel que $\sup \mathrm{A} - \varepsilon < x$.
Dans le cas où A est une partie non vide non majorée, on convient que $\sup \mathrm{A} = +\infty$.

I. Séries entières

I. 1. Définition

Définition 1 – *Série entière*

- On appelle *série entière d'une variable complexe* toute série de fonctions $\sum u_n$ pour laquelle il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes telle que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad u_n(z) = a_n z^n$$

  Cette série entière est notée $\sum a_n z^n$, les complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les *coefficients* de la série entière.
- On appelle *série entière d'une variable réelle* toute série de fonctions $\sum u_n$ pour laquelle il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes telle que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = a_n x^n$$

  Cette série entière est notée $\sum a_n x^n$, les complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les *coefficients* de la série entière.

Remarque Si certains coefficients d'une série entière sont nuls, on modifie parfois la notation habituelle $\sum a_n z^n$. Par exemple, la notation $\sum a_n z^{2n}$ désigne la série entière $\sum b_n z^n$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{2n+1} = 0$ et $b_{2n} = a_n$.

Dans la suite, tant qu'on ne spécifie pas si la variable d'une série entière est réelle ou complexe, il faut comprendre que le résultat est valable dans les deux cas. Pour ne pas alourdir les énoncés, on choisit d'adopter la notation la plus générale $\sum a_n z^n$ d'une série entière de la variable complexe.

I. 2. Rayon de convergence

Théorème 1 – *Lemme d'Abel*

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $\rho \in \mathbb{R}_+^*$.
Si la suite $(a_n \rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Définition 2 – *Rayon de convergence*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.
On appelle *rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n z^n$ l'élément $\mathrm{R} \in \overline{\mathbb{R}_+}$ défini par :

$$\mathrm{R} = \sup \left\{\rho \in \mathbb{R}_+^*,\ (a_n \rho^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\}$$

Proposition 1 – *Disque ouvert de convergence*

Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z \in \mathbb{C}$.

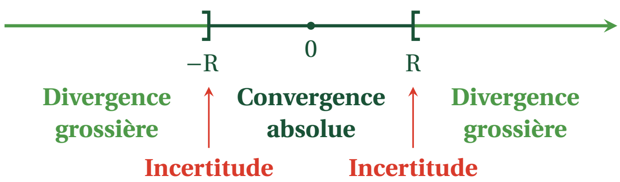
- Si $|z| < \mathrm{R}$, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- Si $|z| > \mathrm{R}$, alors $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Vocabulaire

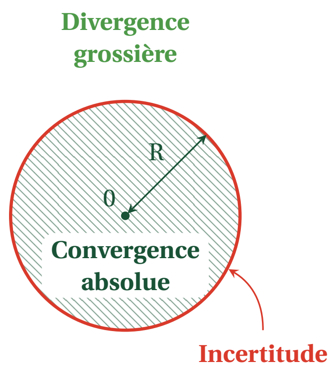
- Dans le cas d'une série entière de la variable complexe, on appelle *disque ouvert de convergence* l'ensemble :

$$\mathrm{B}(0, \mathrm{R}) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < \mathrm{R}\}$$

- Dans le cas d'une série entière de la variable réelle, on appelle *intervalle ouvert de convergence* l'ensemble $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$.



Intervalle ouvert de convergence $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$ *dans* $\mathbb{R}$



Disque ouvert de convergence $\mathrm{B}(0, \mathrm{R})$ *dans* $\mathbb{C}$

Remarques 1

- Le rayon de convergence R est nul (resp. infini) si et seulement si la série entière $\sum a_n z^n$ ne converge que pour $z = 0$ (resp. converge pour tout $z \in \mathbb{C}$).
- Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont même rayon de convergence.
- Comme on le verra plus loin avec quelques exemples, on ne peut rien dire *a priori* du comportement de la série $\sum a_n z^n$ pour $|z| = \mathrm{R}$.

Proposition 2 – *Détermination du rayon de convergence par la règle de d'Alembert*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont on note R le rayon de convergence. On suppose que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell \in [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$$

Alors on a $\mathrm{R} = \dfrac{1}{\ell}$.

Méthode – *Détermination du rayon de convergence*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont on cherche à déterminer le rayon de convergence R.

Une **première méthode** est d'essayer d'utiliser la proposition précédente de détermination du rayon de convergence par la règle de d'Alembert.

Une **autre méthode** consiste à revenir à la définition du rayon de convergence et à s'appuyer sur la proposition précédente. Si $z \in \mathbb{C}$:

Si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- La suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
- La suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
- La série $\sum a_n z^n$ est convergente.
- La série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Alors $\mathrm{R} \geqslant |z|$

Si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- La série $\sum \left|a_n z^n\right|$ est divergente.
- La série $\sum a_n z^n$ est divergente.
- La suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.
- La suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

Alors $\mathrm{R} \leqslant |z|$

Exemples 1

Donner le rayon de convergence des séries entières suivantes :

(1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} z^n$ **(3)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} 2^n z^n$ **(5)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sin(n) z^n$ **(7)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n! z^n$

(2) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^2}$ **(4)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^n$ **(6)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ **(8)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n! z^{n^2}$

Proposition 3 – *Comparaison de rayons de convergence*

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

- Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ à partir d'un certain rang ou si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ alors $\mathrm{R}_a \geqslant \mathrm{R}_b$.
- Si $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} |b_n|$ alors $\mathrm{R}_a = \mathrm{R}_b$.

Remarque On rappelle que si $a_n = o(b_n)$ alors $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ de sorte que le premier point de la proposition précédente s'applique aussi dans ce cas.

Exemples 2

Donner le rayon de convergence des séries entières suivantes :

(1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} e^{\sin n} z^n$ **(2)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sin(2^{-n}) z^n$

Exemples 3 – *Comportement d'une série entière sur la frontière*

Le comportement d'une série entière sur la frontière de son disque de convergence peut être très variable. Dans les cas suivants, donner l'intervalle I de convergence de la série entière et étudier sa convergence sur la frontière de I.

(1) $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ **(2)** $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$ **(3)** $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$

I. 3. Opérations sur les séries entières

Proposition 4 – *Multiplication par un scalaire*

Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_a et $\lambda \in \mathbb{C}^*$.
Alors la série entière $\sum \lambda a_n z^n$ est de rayon de convergence R_a.

Remarque Si $|z| < R_a$, les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum \lambda a_n z^n$ convergent absolument et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Proposition 5 – *Somme*

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
Alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R \geqslant \min(R_a, R_b)$ avec égalité si $R_a \neq R_b$.

Remarque Si $|z| < \min(R_a, R_b)$, les séries $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ et $\sum (a_n + b_n) z^n$ convergent absolument et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Exemple – *Le cas $R_a = R_b$*

Les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} -z^n$ sont de rayons 1 mais leur somme $\sum_{n\geqslant 0} 0z^n$ est de rayon $+\infty$.

Proposition 6 – *Produit*

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
On définit la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

La série entière $\sum c_n z^n$, appelée *produit de Cauchy* des deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, est de rayon de convergence $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.

Remarques

- Si $|z| < \min(R_a, R_b)$, les séries $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ et $\sum c_n z^n$ convergent absolument et :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

- On ne peut rien dire de plus sur R même si $R_a \neq R_b$.
Par exemple, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$ et si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 0, 0, \ldots)$ alors $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 0, 0, \ldots)$ et on a $R_a = 1$ et $R_b = +\infty$ mais $R = +\infty$.

Exemple 4

En effectuant un produit de Cauchy, prouver que :

$$\forall z \in \mathrm{B}(0,1), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$$

II. Régularité de la somme d'une série entière

II. 1. Continuité

Théorème 2 – *Convergence normale sur tout segment de l'intervalle ouvert de convergence*

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence R.
La série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout segment $[-r, r]$ avec $0 \leqslant r < \mathrm{R}$ inclus dans le disque ouvert de convergence $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$.

Remarque 2 La convergence normale n'a *a priori* pas lieu sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$ tout entier ; penser au cas de $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$.

Vocabulaire Dans la suite, si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon R, on appelle *fonction somme* de cette série entière la fonction S définie sur l'ensemble D des points où la série entière converge simplement par :

$$\forall z \in \mathrm{D}, \quad \mathrm{S}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Par définition du rayon de convergence, on a $\mathrm{B}(0,\mathrm{R}) \subset \mathrm{D} \subset \mathrm{B_F}(0,\mathrm{R})$ dans le cas d'une variable complexe et, dans le cas d'une variable réelle, $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[\, \subset \mathrm{D} \subset [-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$.

Théorème 3 – *Continuité sur l'intervalle ouvert de convergence*

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence R.
La fonction somme S de la série entière $\sum a_n x^n$ est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$.

Exemple 5

Prouver que la fonction somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n^2}$ est continue sur $]-1, 1[$.

Remarque Il n'y a pas de résultat général pour la continuité aux points $\pm\mathrm{R}$.
Un cas favorable est celui où la série $\sum a_n \mathrm{R}^n$ converge absolument puisque, dans ce cas, la série entière converge normalement sur $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$ et y est donc continue.

Exemple 6

Reprendre l'exemple de la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n^2}$ et prouver qu'elle est en fait continue sur $[-1, 1]$.

Théorème 4 – *Continuité sur le disque ouvert de convergence*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de la variable complexe de rayon de convergence R.
La fonction somme S de la série entière $\sum a_n z^n$ est continue sur le disque ouvert de convergence $\mathrm{B}(0,\mathrm{R})$.

Remarque La continuité de la somme d'une série entière d'une variable complexe est à comprendre au sens de la continuité d'une application de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ dans lui-même.

II. 2. Intégration

Théorème 5 – *Intégration sur l'intervalle ouvert de convergence*

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence R.
On désigne par F une primitive de la somme S de la série entière $\sum a_n x^n$ sur $]-R, R[$. Alors :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

II. 3. Dérivation

Proposition 7 – *Rayon de convergence d'une série dérivée*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Alors les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^{n-1} = \sum (n+1) a_{n+1} z^n$ ont même rayon de convergence.

Théorème 6 – *Dérivation sur l'intervalle ouvert de convergence*

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence R.
La fonction somme S de la série entière $\sum a_n x^n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$ et on obtient ses dérivées successives en dérivant terme à terme la somme :

$$\forall k \geqslant 0, \quad \forall x \in]-R, R[, \quad S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n$$

En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$$

Remarque Le théorème précédent montre que si $\sum a_n x^n$ est une série entière de la variable réelle de rayon de convergence $R > 0$ alors sa somme S vérifie :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

III. Développement en série entière

III. 1. Fonctions développables en séries entières

Définition 3 – *Fonction développable en série entière*

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur un intervalle I avec $0 \in \mathring{I}$.
On dit que f *est développable en série entière* s'il existe une série entière de la variable réelle $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et $r \in]0, R[$ tels que :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Remarques

- Être développable en série entière ne veut pas dire être globalement égal à la somme d'une série entière mais simplement coïncider avec la somme d'une série entière sur un intervalle ouvert non vide centré en 0.
- Une fonction développable en série entière est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de 0. Mais cette condition n'est pas suffisante.
  Par exemple, on peut montrer que la fonction définie par $f(x) = \exp(-1/x^2)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $f(0) = 0$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais qu'elle n'est pas développable en série entière.
- Avec les propriétés sur les opérations sur les séries entières, les combinaisons linéaires, produits, dérivées et primitives de fonctions développables en séries entières sont développables en séries entières.

Définition 4 – *Série de Taylor*

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0.

On appelle *série de Taylor* de f la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Remarque Une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 est développable en série entière si et seulement si elle est égale à la somme de sa série de Taylor sur un intervalle $]-r\,,r[$ avec $r > 0$.

Théorème 7 – *Unicité du développement en série entière*

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de la variable réelle de rayons de convergence R_a et R_b.
On suppose qu'il existe $r \in \,]0, \min(\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b)[$ tel que :

$$\forall x \in \,]-r\,,r[\,,\quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

Alors les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont égales.

Exercice 7 – *Fonction développable en série entière et parité*

Soit f une fonction paire qui est développable en série entière. Montrer que les coefficients d'indice impair de son développement en série entière sont nuls.

Remarque De même, pour une fonction impaire développable en série entière, les coefficients d'indice pair de son développement en série entière sont nuls.

III. 2. Développement en série entière des fonctions usuelles

Théorème 8 – *Développement en série entière usuels*

Fonction exponentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Fonctions hyperboliques :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Fonctions circulaires :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Fonctions puissances :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \left]-1,1\right[, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

Fonction logarithme népérien :

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

Fonction arctangente :

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad \mathrm{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Remarque On a en particulier les développements suivants sur $\left]-1,1\right[$:

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad \text{et} \qquad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

Exemple 8

Donner le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

(1) $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{sh}(n) x^n$ **(2)** $\sum_{n\geqslant 0} n^2 x^n$

Méthode – *Montrer qu'une fonction est développable en série entière*

Pour prouver qu'une fonction f donnée est développable en série entière, on peut essayer de :

- Réaliser des manipulations sur l'expression de la fonction f pour faire apparaître des développements en série entières usuels ;
- En utilisant les **Théorèmes 5** et **6**, procéder par dérivation ou primitivation d'un développement en série entière connu ;
- Se servir de la « méthode de l'équation différentielle » qui sera étudiée plus loin.

Exemples 9

Justifier que les deux fonctions suivantes sont développables en série entière et donner leurs développements ainsi que le rayon de convergence associé :

(1) $f : x \mapsto \ln(x^2 - 5x + 6)$ **(2)** $f : x \mapsto \mathrm{Arcsin}\, x$

III. 3. Développements en série entière complexes

Proposition 8 – *Série géométrique*

La série entière de la variable complexe $\sum_{n\geqslant 0} z^n$, appelée *série géométrique*, est de rayon de convergence 1.

De plus : $$\forall z \in \mathrm{B}(0,1), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

PROPOSITION 9 – *Série exponentielle*

La série entière de la variable complexe $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{z^n}{n!}$, appelée *série exponentielle*, est de rayon de convergence $+\infty$.
Sa somme est appelée *exponentielle complexe*, notée exp, et on a :

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad \exp(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$$

PROPOSITION 10 – *Exponentielle complexe d'une somme*

Pour $z_1, z_2\in\mathbb{C}$, on a : $$\exp(z_1+z_2)=\exp(z_1)\exp(z_2)$$

REMARQUE En première année, on a prolongé la fonction exponentielle réelle à $\mathbb{C}$ en posant, pour $z=x+iy\in\mathbb{C}$, $e^z=e^x(\cos(y)+i\sin(y))$. Ces deux définitions, bien heureusement, coïncident. En effet :

$$\exp(iy)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(iy)^n}{n!}=\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{y^{2p}}{(2p)!}+i\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{y^{2p+1}}{(2p+1)!}=\cos(y)+i\sin(y)$$

De plus, par le développement de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, on a $e^x=\exp(x)$. Finalement :

$$e^z=e^x(\cos(y)+i\sin(y))=\exp(x)\exp(iy)=\exp(x+iy)=\exp(z)$$

III. 4. « MÉTHODE DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE »

MÉTHODE – *Méthode de l'équation différentielle*

Dans certains cas, la méthode dite « de l'équation différentielle » permet de justifier qu'une fonction f est développable en série entière et de déterminer son développement. On procède par analyse – synthèse de la façon suivante :

(1) On établit une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux (E) satisfaite par la fonction f.

(2) Par analyse, on cherche une solution de (E) sous la forme de la somme d'une série entière.

(3) Pour la synthèse, on vérifie que la série entière trouvée à l'étape précédente est de rayon de convergence non nul et que sa somme S est bien solution de (E).

(4) Par connaissance des solutions de (E) ou par un argument d'unicité d'un problème de Cauchy associé à (E), on relie S et f pour en déduire que f est développable en série entière et donner son développement.

EXEMPLE 10

On introduit la fonction f_α définie par $f_\alpha(x)=(1+x)^\alpha$ pour $x\in\,]-1,+\infty[$, où $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$.
Justifier que f_α est développable en série entière et déterminer son développement ainsi que le rayon de convergence associé.