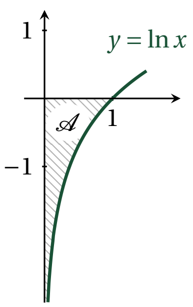
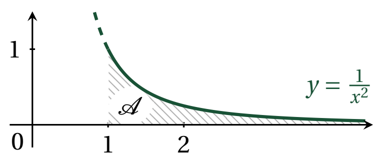
INTÉGRATION

Plan du cours

Dans ce chapitre, on pose pour acquis la notion d'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Nous allons étendre cette notion sur deux aspects :



- Les fonctions intégrées pourront être moins régulières, à savoir continues par morceaux et non plus seulement continues.
- Le domaine d'intégration pourra être un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et non plus seulement un segment.



Par exemple, on pourra s'intéresser aux intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \ln t \,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

La première intégrale pose un soucis au point 0 puisque la fonction ln n'y est pas définie, on intègre sur un intervalle semi-ouvert $]0,1]$. Quant à la seconde intégrale, elle pose un soucis puisque l'on intègre sur un intervalle semi-ouvert non borné $[1,+\infty[$. Géométriquement, étudier l'existence de ces intégrales revient à se demander si « l'aire sous la courbe » $\mathscr{A}$ de la fonction ln sur $]0,1]$ ou de la fonction $x \mapsto 1/x^2$ sur $[1,+\infty[$ est finie.

Dans la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, les intervalles considérés seront toujours d'intérieur non vide et, sauf mention du contraire, les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{K}$.

I. Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux

I. 1. Fonctions continues par morceaux

Définition 1 – *Subdivision*

On appelle *subdivision* du segment $[a,b]$ avec $a<b$ toute suite finie $\sigma=(a_1,\dots,a_n)$ de réels tels que :

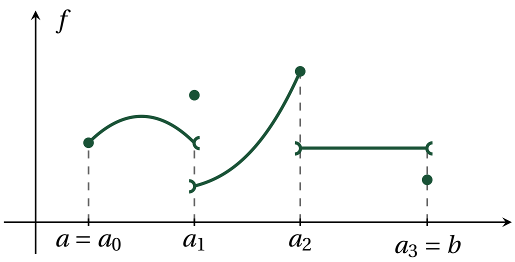
$$a=a_0<a_1<\cdots<a_n=b$$

Définition 2 – *Continuité par morceaux*

- Une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ est dite *continue par morceaux* s'il existe une subdivision $\sigma=(a_1,\dots,a_n)$ du segment $[a,b]$ telle que, pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$, la restriction de f à $]a_i,a_{i+1}[$ possède un prolongement continu sur le segment $[a_i,a_{i+1}]$.
  Une telle subdivision est dite *adaptée* à f.
- Une fonction $f:\mathrm{I}\to\mathbb{K}$ définie sur un intervalle I est dite *continue par morceaux* si elle est continue par morceaux sur tout segment de I.

Notation On note $\mathscr{CM}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur l'intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Remarque Pour justifier qu'une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ est continue par morceaux, on détermine une subdivision $\sigma=(a_1,\dots,a_n)$ du segment $[a,b]$ pour laquelle, pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$, la fonction $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ est continue et admet des limites finies en a_i et a_{i+1}.



Exemples 1

- Prouver que toute fonction continue f sur un intervalle y est continue par morceaux.
- Montrer que la fonction f qui est nulle sur $\mathbb{R}^*$ et égale à 1 en 0 est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Étudier la continuité par morceaux de la fonction partie entière $f:x\mapsto\lfloor x\rfloor$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 1 – *Caractère borné des fonctions continues par morceaux sur un segment*

Toute fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.

Proposition 2 – *Opérations sur les fonctions continues par morceaux*

- **Combinaison linéaire :** L'ensemble $\mathscr{CM}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$.
  Autrement dit, si $f,g\in\mathscr{CM}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}$ alors $\lambda f+g\in\mathscr{CM}(\mathrm{I},\mathbb{K})$.
- **Produit :** Si $f,g\in\mathscr{CM}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ alors $fg\in\mathscr{CM}(\mathrm{I},\mathbb{K})$.

I. 2. Intégrale sur un segment

On est maintenant en mesure de définir l'intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux grâce au résultat qui suit :

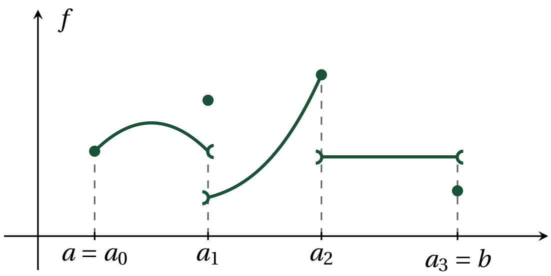
Proposition 3 – *Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment*

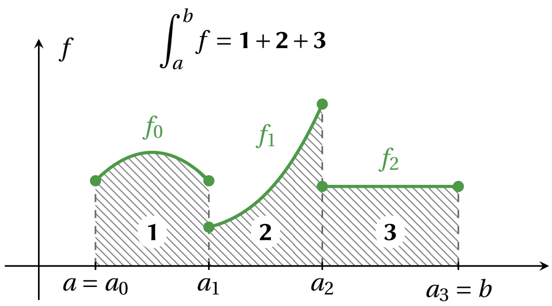
Soient $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ avec $a < b$ et $\sigma = (a_1, \dots, a_n)$ une subdivision adaptée à f. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, on note f_i le prolongement continu de $f_{|\,]a_i, a_{i+1}[}$ sur $[a_i, a_{i+1}]$.
Alors la somme :

$$S_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i$$

ne dépend pas du choix de la subdivision σ adaptée à f.
Cette somme est appelée *intégrale* de f sur le segment $[a, b]$. On la note $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ou encore $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Convention Dans le cas où $a > b$, on pose $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f = -\int_{[a,b]} f$. On convient aussi que $\displaystyle\int_a^a f = 0$.





Exemple 2

On introduit de nouveau la fonction f qui est nulle sur $\mathbb{R}^*$ et égale à 1 en 0.
Prouver que son intégrale sur le segment $[-a, a]$ pour $a > 0$ est nulle.

I. 3. Propriétés de l'intégrale

Proposition 4 – *Propriétés de l'intégrale*

Soient $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ et $g : [a, b] \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

- **Linéarité :** Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$.
- **Inégalité triangulaire :** Si $a \leqslant b$, $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$.
- **Relation de Chasles :** Si $c \in [a, b]$, $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

PROPOSITION 5 – *Positivité, croissance et caractère défini*

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.

- **Positivité :** Si $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$ et si $a \leqslant b$ alors $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$.
- **Croissance :** Si $f \leqslant g$ sur $[a,b]$ et si $a \leqslant b$ alors $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.
- **Caractère défini :** Si $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$ et si $\displaystyle\int_a^b f = 0$ alors f est nulle sur $[a,b]$ sauf peut-être en un nombre fini de points.

PROPOSITION 6 – *Intégrale d'une fonction continue par morceaux à valeurs complexes*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction.
Alors f est continue par morceaux sur $[a,b]$ si et seulement si les fonctions à valeurs réelles $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues par morceaux sur $[a,b]$. Dans ce cas, on a :

$$\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re}(f) + i\int_a^b \mathrm{Im}(f)$$

II. INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

II. 1. INTÉGRALE GÉNÉRALISÉE SUR UN INTERVALLE SEMI-OUVERT

DÉFINITION 3 – *Intégrale généralisée sur un intervalle semi-ouvert*

Soient $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tels que $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

- Soit $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b[$.
  On dit que *l'intégrale généralisée (ou impropre)* $\displaystyle\int_a^b f$ *converge* si la limite $\displaystyle\lim_{x\to b^-}\int_a^x f$ existe et est finie.
  Cette limite est alors notée $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ou encore $\displaystyle\int_{[a,b[} f$.
- Soit $f :]a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $]a,b]$.
  On dit que *l'intégrale généralisée (ou impropre)* $\displaystyle\int_a^b f$ *converge* si la limite $\displaystyle\lim_{x\to a^+}\int_x^b f$ existe et est finie.
  Cette limite est alors notée $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ou encore $\displaystyle\int_{]a,b]} f$.

VOCABULAIRE Si la limite en jeu n'existe pas ou n'est pas finie, on dit que l'intégrale *diverge*.
Étudier la *nature* d'une intégrale généralisée, c'est étudier si elle est convergente ou divergente.

EXEMPLES 3

Étudier la nature et donner la valeur en cas de convergence des intégrales suivantes :

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ **(2)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^2}$ **(3)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ **(4)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t)\,\mathrm{d}t$

Exemple 4

On cherche à étudier si, pour que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge, il est nécessaire et/ou suffisant que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

(1) En donnant un contre-exemple, montrer que ce n'est pas suffisant.

(2) On définit une fonction f sur $[1,+\infty[$ en précisant qu'elle est nulle en dehors des segments $[n, n+1/n^3]$ et affine sur $[n, n+1/(2n^3)]$ et $[n+1/(2n^3), n+1/n^3]$ avec $f(n+1/(2n^3)) = n$.
Montrer que la condition proposée n'est pas nécessaire.

Proposition 7 – *Premières propriétés directes*

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b[$.

- Si $c \in [a,b[$, les intégrales $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_c^b f$ ont même nature. *(caractère local de la nature d'une intégrale)*
- Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge alors $\displaystyle\int_x^b f \xrightarrow[x\to b^-]{} 0$. *(convergence du reste de l'intégrale vers 0)*

Proposition 8 – *Cas des fonctions positives*

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux **et positive** sur $[a,b[$.
Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est majorée sur $[a,b[$.

II. 2. Intégrales de référence

Proposition 9 – *Intégrales de Riemann*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- **Sur $[1,+\infty[$:** L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
- **Sur $]0,1]$:** L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Proposition 10 – *Intégrale de l'exponentielle au voisinage de $+\infty$*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 0$. Dans ce cas :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$$

Proposition 11 – *Intégrale du logarithme népérien au voisinage de* 0

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

II. 3. Intégrale généralisée sur un intervalle ouvert

Définition 4 – *Intégrale généralisée sur un intervalle ouvert*

Soient $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tels que $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et $f :]\,a,b\,[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $]\,a,b\,[$.
Un réel $c \in]\,a,b\,[$ étant fixé, on dit que *l'intégrale généralisée (ou impropre)* $\displaystyle\int_a^b f$ *converge* si et seulement si les deux intégrales $\displaystyle\int_a^c f$ et $\displaystyle\int_c^b f$ convergent. On pose alors :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Cette définition ne dépend pas du choix de c.

Vocabulaire Lorsque la condition précédente n'est pas vérifiée, on dit que l'intégrale *diverge*.

Notation L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$, encore une fois, peut aussi être notée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_{]\,a,b\,[} f$.

Convention Comme dans le cas d'un segment, si $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ vérifie $a > b$, que l'on intègre sur $[a,b[$, $]a,b]$ ou $]a,b[$, on pose, en cas de convergence, $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$ et on convient que $\displaystyle\int_a^a f = 0$.

Exemple 5

Étudier la nature et donner la valeur en cas de convergence des intégrales suivantes :

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ **(2)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\,\mathrm{d}t$ **(3)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque Dans la définition précédente, il faut bien traiter les deux intégrales **séparément**.
Par exemple, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} \sin(t)\,\mathrm{d}t = 0$ alors que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

Proposition 12 – *Intégrales faussement impropres*

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$ et $f :]\,a,b\,[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $]\,a,b\,[$.
Si la fonction f admet un prolongement continu $\tilde{f}$ sur $[\,a,b\,]$ alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente et vaut $\displaystyle\int_a^b \tilde{f}$.

Remarque Ce résultat est valable si la fonction f est définie sur un intervalle semi-ouvert $]\,a,b\,]$ ou $[\,a,b\,[$.

Exemple 6

Prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

II. 4. Propriétés des intégrales généralisées

Proposition 13 – *Propriétés des intégrales généralisées*

Soient $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et f et g deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle d'extrémités a et b et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- **Linéarité :** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Si les intégrales $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent alors $\int_a^b (\lambda f + g)$ aussi et :
$$\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$$
- **Relation de Chasles :** Soit $c \in \,]\,a, b\,[$.
L'intégrale $\int_a^b f$ converge si et seulement si les intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent et dans ce cas :
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Proposition 14 – *Positivité, croissance et caractère défini*

Soient $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et f et g deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle I d'extrémités a et b et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- **Positivité :** Si $f \geqslant 0$ sur I, si $a \leqslant b$ et si $\int_a^b f$ converge alors $\int_a^b f \geqslant 0$.
- **Croissance :** Si $f \leqslant g$ sur I, si $a \leqslant b$ et si $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent alors $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.
- **Caractère défini :** Si f est continue et positive sur I, si $\int_a^b f$ converge et si $\int_a^b f = 0$ alors f est nulle sur I.

Proposition 15 – *Intégrale généralisée d'une fonction complexe*

Soient $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et f une fonction continue par morceaux sur un intervalle d'extrémités a et b et à valeurs complexes.
L'intégrale $\int_a^b f$ converge si et seulement si les intégrales $\int_a^b \mathrm{Re}(f)$ et $\int_a^b \mathrm{Im}(f)$ convergent et dans ce cas :
$$\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re}(f) + i \int_a^b \mathrm{Im}(f)$$

II. 5. Calcul d'intégrales généralisées

Proposition 16 – *Crochet généralisé*

Soient $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et f une fonction continue sur un intervalle I d'extrémités a et b.

Si f admet une primitive F sur I alors $\int_a^b f$ converge si et seulement si F admet des limites finies en a et b.

On écrit alors :
$$\int_a^b f = [\,\mathrm{F}\,]_a^b = \lim_b \mathrm{F} - \lim_a \mathrm{F}$$

Remarque Bien sûr, si par exemple $a \in \mathrm{I}$, alors $\lim\limits_a \mathrm{F} = \mathrm{F}(a)$.

Exemple On a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\,\mathrm{Arctan}\,]_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{+\infty} \mathrm{Arctan} - \lim_{-\infty} \mathrm{Arctan} = \pi$.

Théorème 1 – *Changement de variable, cas croissant*

Soient $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tels que $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et f une fonction continue par morceaux sur $]\,a,b\,[$. On se donne $(\alpha,\beta) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tels que $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$ et $\varphi :]\,\alpha,\beta\,[\to]\,a,b\,[$ une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ strictement croissante.

Alors $f\circ\varphi$ est continue par morceaux sur $]\,\alpha,\beta\,[$, les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et, en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

Remarques

- Si $\varphi :]\,\alpha,\beta\,[\to]\,a,b\,[$ une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ strictement décroissante, on a un résultat analogue mais il faut échanger les bornes α et β dans l'égalité vérifiée en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\beta^\alpha f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

- Dans le contexte de ce théorème, on dit que l'on a réalisé le changement de variable $t = \varphi(u)$. Il faut remarquer que l'on exprime ainsi l'« ancienne variable » t en fonction la « nouvelle variable » u. En pratique, pour réaliser un changement de variable :
  (1) On exprime l'« ancienne variable » t en fonction la « nouvelle variable » u sous la forme $t = \varphi(u)$.
  (2) On vérifie que φ est bijective et de classe $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition (la stricte monotonie étant une conséquence de la continuité et de l'injectivité).
  (3) On réalise le changement de variable dans l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$:
    - On modifie les bornes a et b en regardant ce que vaut u lorsque $t = \varphi(u) = a$ et $t = \varphi(u) = b$.
    - On remplace t par $\varphi(u)$ dans l'intégrande $f(t)$.
    - On remplace $\mathrm{d}t$ par $\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$.

  (4) La nouvelle intégrale obtenue est, sous réserve de sa convergence, égale à celle de départ. Il reste donc à vérifier sa convergence pour que l'égalité soit bien valide.
- Bien entendu, le résultat précédent peut être appliqué sur des intervalles semi-ouverts $]\,a,b\,]$ ou $[\,a,b\,[$.

Exemple 7

Établir que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2.$

Proposition 17 – *Intégrales de Riemann sur un intervalle borné quelconque*

Soient $a < b$ deux réels et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Les intégrales $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$ et $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha}$ convergent si et seulement si $\alpha < 1$.

Théorème 2 – *Intégration par parties*

Soient $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle d'extrémités a et b.
Si le produit fg admet des limites finies en a et en b alors les intégrales $\int_a^b f'g$ et $\int_a^b fg'$ sont de même nature et, en cas de convergence :

$$\int_a^b f'g = [\, fg\,]_a^b - \int_a^b fg'$$

Remarque Le résultat ci-dessus permet de réaliser une intégration par parties directement sur des intégrales généralisées, sous réserve de bien en vérifier les hypothèses. En pratique, il est tout à fait possible de s'en passer en réalisant l'intégration par parties sur un segment puis en passant à la limite.

Exemple 8

Montrer que l'intégrale suivante converge et donner sa valeur :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

II. 6. Convergence absolue des intégrales généralisées, intégrabilité

Définition 5 – *Convergence absolue d'une intégrale généralisée*

Soient $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tels que $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle d'extrémités a et b.
On dit que l'intégrale $\int_a^b f$ *converge absolument* si l'intégrale $\int_a^b |f|$ converge.

Théorème 3 – *La convergence absolue implique la convergence*

Soient $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tels que $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle d'extrémités a et b.
Si l'intégrale $\int_a^b f$ converge absolument alors elle converge. De plus, on a :

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$$

Remarque La réciproque est fausse. Un exemple sera étudié en exercice.

Définition 6 – *Intégrabilité*

Soient $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tels que $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I d'extrémités a et b.
On dit que la fonction f est *intégrable* sur I si l'intégrale $\int_a^b |f|$ converge absolument.

Remarque Lorsque f est de signe constant sur l'intervalle I, l'intégrabilité de f sur I équivaut à la convergence de l'intégrale généralisée associée à f sur I.

Théorème 4 – *Théorème de comparaison*

Soient $(a,b)\in\overline{\mathbb{R}}^2$ tels que $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$ et f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[\,a,b\,[$.

- Si $|f|\leqslant|g|$ sur $[\,a,b\,[$ alors l'intégrabilité de g sur $[\,a,b\,[$ implique celle de f sur $[\,a,b\,[$.
- Si $f\sim g$ au voisinage de b, alors l'intégrabilité de g sur $[\,a,b\,[$ équivaut à celle de f sur $[\,a,b\,[$.

Remarque Le théorème de comparaison peut être utilisé pour montrer la convergence d'une intégrale puisque l'intégrabilité implique la convergence.

Lorsque les fonctions considérées sont positives, l'intégrabilité équivaut à la convergence de l'intégrale généralisée et le théorème de comparaison prend la forme suivante :

Théorème 5 – *Théorème de comparaison pour les fonctions à valeurs positives*

Soient $(a,b)\in\overline{\mathbb{R}}^2$ tels que $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$ et f et g continues par morceaux et positives sur $[\,a,b\,[$.

- Si $f\leqslant g$ sur $[\,a,b\,[$ alors la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g$ implique la convergence de $\displaystyle\int_a^b f$.
- Si $f\sim g$ au voisinage de b, alors $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ sont de même nature.

Méthode – *Comparaison à une intégrale de Riemann*

- **Sur $[a,+\infty[$:** Soit $f:[\,a,+\infty\,[\to\mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[\,a,+\infty\,[$ avec $a\in\mathbb{R}$. S'il existe $\alpha>1$ tel que $t^\alpha f(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (absolument).
- **Sur $]0,a]$:** Soit $f:]\,0,a\,]\to\mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $]\,0,a\,]$ avec $a>0$. S'il existe $\alpha<1$ tel que $t^\alpha f(t)\xrightarrow[t\to0^+]{}0$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{a}f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (absolument).

Exemples 9

Étudier la convergence absolue et la convergence des intégrales suivantes :

(1) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(\ln t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ **(2)** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t+1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t$ **(3)** $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ **(4)** $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

II. 7. Espaces fonctionnels et intégrabilité

Dans cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Proposition 18 – *Espace des fonctions intégrables*

L'ensemble $\mathscr{L}^1(\mathrm{I},\mathbb{K})$ des fonctions continues par morceaux intégrables sur I est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

Définition 7 – *Fonction de carré intégrable*

Une fonction f continue par morceaux sur I est dite *de carré intégrable* si la fonction f^2 est intégrable sur I.

Exemples 10

(1) Sur $[1,+\infty[$, trouver un exemple de fonction qui est de carré intégrable mais non intégrable.

(2) Sur $]0,1]$, trouver un exemple de fonction qui est intégrable mais pas de carré intégrable.

Proposition 19 – *Produit de fonctions de carré intégrable*

Le produit de deux fonctions continues par morceaux de carré intégrable sur I est intégrable sur I.

Proposition 20 – *Espace des fonctions de carré intégrable*

L'ensemble $\mathscr{L}^2(\mathrm{I},\mathbb{K})$ des fonctions continues par morceaux de carré intégrable sur I est un $\mathbb{K}$−espace vectoriel.

Proposition 21 – *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux de carré intégrable sur I. Alors :

$$\left|\int_{\mathrm{I}} fg\right| \leqslant \left(\int_{\mathrm{I}} |f^2|\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathrm{I}} |g^2|\right)^{\frac{1}{2}}$$

III. Suites et séries de fonctions intégrables

III. 1. Théorème de convergence dominée

Dans cette sous-partie, on donne des conditions suffisantes pour pouvoir échanger une limite et une intégrale. Plus précisément, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, on va donner des conditions permettant d'assurer la relation suivante :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathrm{I}} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathrm{I}} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Il faut comprendre que ceci n'a rien d'automatique :

Exemple 11

Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}_+^*$, on pose $f_n(t) = ne^{-nt}$.
Déterminer la limite simple $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier si l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème 6 – *Théorème de convergence dominée*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$. On suppose que :

- Les fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont continues par morceaux sur I et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I ;
- Il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I à valeurs positives telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \forall t\in\mathrm{I},\quad |f_n(t)| \leqslant \varphi(t) \qquad \textit{Hypothèse de domination}$$

Alors les fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f sont intégrables sur I et :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathrm{I}} f_n = \int_{\mathrm{I}} \lim_{n\to+\infty} f_n = \int_{\mathrm{I}} f$$

Remarques

- **Dans l'hypothèse de domination, la fonction φ ne doit pas dépendre de n.**
- L'hypothèse f continue par morceaux doit être vérifiée. En effet, il existe des suites de fonctions continues par morceaux qui convergent simplement vers une fonction qui n'est pas continue par morceaux.

Exemples 12

Étudier les limites suivantes :

(1) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+nt)(1+t^2)}$ **(2)** $\displaystyle \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n(t)\,\mathrm{d}t$

III. 2. Séries de fonctions intégrables

Dans cette sous-partie, on donne cette fois des conditions suffisantes pour pouvoir échanger une somme infinie et une intégrale. Plus précisément, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, on va donner des conditions permettant d'assurer la relation suivante :

$$\int_{\mathrm{I}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_{\mathrm{I}}u_n\right)$$

Encore une fois, cet échange n'a *a priori* rien d'automatique.

Théorème 7 – *Théorème d'intégration terme à terme*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$. On suppose que :

- Les fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont continues par morceaux et intégrables sur I ;
- La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I et sa somme est continue par morceaux sur I ;
- La série $\sum\left(\int_{\mathrm{I}}|u_n|\right)$ converge.

Alors la fonction $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ est intégrable sur I et l'on a :

$$\int_{\mathrm{I}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_{\mathrm{I}}u_n\right)$$

Exemple 13

Démontrer que :

$$\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-nt}}{\sqrt{n}}\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$$

Remarque Lorsque le théorème d'intégration terme à terme ne s'applique pas ou peine à s'appliquer, on peut avoir recours au théorème de convergence dominée appliqué à la suite des sommes partielles de la série de fonctions.

Exemple 14

Établir que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

IV. Intégrales à paramètre

Dans cette partie, nous considérons des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ définies sur $\mathrm{I}\times\mathrm{J}$ où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$. Le but est de donner des conditions suffisantes pour obtenir de la régularité sur la fonction :

$$x \longmapsto \int_{\mathrm{I}} f(t,x)\,\mathrm{d}t$$

Ce type d'intégrale est appelée *intégrale à paramètre*, le paramètre étant la variable x sur laquelle on cherche à obtenir de la régularité. L'intervalle I d'intégration est quant à lui indépendant de la variable x.

IV. 1. Continuité d'une intégrale à paramètre

Théorème 8 – *Théorème de continuité des intégrales à paramètre*

Soit f une fonction définie sur $\mathrm{I}\times\mathrm{J}$ où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que :

- Pour tout $t\in\mathrm{I}$, la fonction $x\longmapsto f(t,x)$ est continue sur J ;
- Pour tout $x\in\mathrm{J}$, la fonction $t\longmapsto f(t,x)$ est continue par morceaux sur I ;
- Pour tout segment $[a,b]\subset\mathrm{J}$, il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I à valeurs positives telle que :

$$\forall x\in[a,b],\quad \forall t\in\mathrm{I},\quad \left|f(t,x)\right|\leqslant\varphi(t)$$ *Hypothèse de domination sur tout segment*

Alors la fonction $x\longmapsto \int_{\mathrm{I}} f(t,x)\,\mathrm{d}t$ est bien définie et continue sur J.

Remarques

- **Dans l'hypothèse de domination, la fonction φ ne doit pas dépendre de x.**
  Par contre, elle dépend *a priori* du segment $[a,b]$.
- Cette hypothèse de domination sur tout segment peut être remplacée par une hypothèse de domination globale, c'est-à-dire l'existence d'une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I à valeurs positives telle que :

$$\forall x\in\mathrm{J},\quad \forall t\in\mathrm{I},\quad \left|f(t,x)\right|\leqslant\varphi(t)$$ *Hypothèse de domination globale*

  Cette nouvelle hypothèse est bien sûr plus difficile à satisfaire que la précédente mais elle se révèle suffisante dans de nombreux cas simples.

Exemple 15

Étudier la continuité de la fonction g suivante :

$$\forall x>0,\quad g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

IV. 2. Limite d'une intégrale à paramètre

Théorème 9 – *Théorème de convergence dominée à paramètre continu*

Soient f une fonction définie sur $\mathrm{I}\times\mathrm{J}$ où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ et a une extrémité de J. On suppose :

- Pour tout $t\in\mathrm{I}$, on a $f(t,x)\xrightarrow[x\to a]{} g(t)$ avec g continue par morceaux sur I ;
- Pour tout $x\in\mathrm{J}$, la fonction $t\longmapsto f(t,x)$ est continue par morceaux sur I ;
- Il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I à valeurs positives telle que :

$$\forall x\in\mathrm{J},\quad \forall t\in\mathrm{I},\quad \left|f(t,x)\right|\leqslant\varphi(t)$$ *Hypothèse de domination*

Alors la fonction g est intégrable sur I et :

$$\lim_{x\to a}\int_{\mathrm{I}} f(t,x)\,\mathrm{d}t=\int_{\mathrm{I}} g(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque Il est en fait suffisant de vérifier l'hypothèse de domination sur un voisinage du point a par rapport à la variable x.

Exemple 16

Étudier la limite en $+\infty$ de la fonction g suivante :

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} \, \mathrm{d}t$$

IV. 3. Dérivation d'une intégrale à paramètre

Théorème 10 – *Théorème de dérivation des intégrales à paramètre*

Soit f une fonction définie sur $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$ où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que :

- Pour tout $t \in \mathrm{I}$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J ;
- Pour tout $x \in \mathrm{J}$, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur I ;
- Pour tout $x \in \mathrm{J}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est continue par morceaux sur I ;
- Pour tout segment $[a,b] \subset \mathrm{J}$, il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I à valeurs positives telle que :

$$\forall x \in [a,b], \quad \forall t \in \mathrm{I}, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leqslant \varphi(t)$$

Hypothèse de domination sur tout segment

Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_{\mathrm{I}} f(t,x)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J et :

$$\forall x \in \mathrm{J}, \quad g'(x) = \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,\mathrm{d}t$$

Remarque Pour le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, les mêmes remarques que pour le théorème de continuité des intégrales à paramètre peuvent être faites.

Exemple 17

On reprend l'étude de la fonction g suivante :

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} \, \mathrm{d}t$$

Prouver que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

IV. 4. Classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre

Théorème 11 – *Classe $\mathscr{C}^k$ des intégrales à paramètre*

Soit f une fonction définie sur $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$ où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que :

- Pour tout $t \in \mathrm{I}$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J ;
- Pour tout $x \in \mathrm{J}$ et tout $p \in [\![0, k-1]\!]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(t,x)$ est intégrable sur I ;
- Pour tout $x \in \mathrm{J}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,x)$ est continue par morceaux sur I ;
- Pour tout segment $[a,b] \subset \mathrm{J}$, il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I à valeurs positives telle que :

$$\forall x \in [a,b], \quad \forall t \in \mathrm{I}, \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,x)\right| \leqslant \varphi(t)$$

Hypothèse de domination sur tout segment

Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_{\mathrm{I}} f(t,x)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J et, pour $p \in [\![1, k]\!]$, on a :

$$\forall x \in \mathrm{J}, \quad g^{(p)}(x) = \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(t,x)\,\mathrm{d}t$$

Remarque Pour le théorème de classe $\mathscr{C}^k$ des intégrales à paramètre, les mêmes remarques que pour les deux théorèmes précédents peuvent être faites.

Exemple 18

On reprend l'étude de la fonction g suivante :

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

Prouver que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.