



PLAN DU COURS

I. PRODUIT SCALAIRE ET NORME ASSOCIÉE	1
I. 1. Produit scalaire	1
I. 2. Norme associée à un produit scalaire	2
II. ORTHOGONALITÉ	3
II. 1. Familles orthogonales et orthonormées	3
II. 2. Orthogonal d'un sous-espace vectoriel	5
II. 3. Bases orthonormées d'un espace euclidien	6
III. PROJECTION ORTHOGONALE SUR UN SOUS-ESPACE DE DIMENSION FINIE	6
III. 1. Supplémentaire orthogonal	7
III. 2. Projection orthogonale	7
III. 3. Distance à un sous-espace vectoriel	9
III. 4. Formes linéaires sur un espace euclidien	9

Dans ce chapitre, E désigne un \mathbb{R} -espace vectoriel.

I. PRODUIT SCALAIRE ET NORME ASSOCIÉE

I. 1. PRODUIT SCALAIRE

DÉFINITION 1 – *Produit scalaire*

On appelle *produit scalaire* sur E toute application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- **Linéarité à gauche :** $\forall x, y, z \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \varphi(\lambda x + y, z) = \lambda \varphi(x, z) + \varphi(y, z)$.
- **Symétrie :** $\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.
- **Positivité :** $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$.
- **Caractère défini :** $\forall x \in E, \varphi(x, x) = 0 \implies x = 0$.

NOTATIONS Si φ est un produit scalaire et si $x, y \in E$, alors le réel $\varphi(x, y)$ est appelé *le produit scalaire des vecteurs x et y* . On le note $(x|y)$, $\langle x, y \rangle$, $\langle x|y \rangle$ ou encore $x \cdot y$.

VOCABULAIRE Si le \mathbb{R} -espace vectoriel E est muni d'un produit scalaire, on dit que c'est un *espace préhilbertien*. S'il est de plus de dimension finie, on dit que c'est un *espace euclidien*.

REMARQUES

- Par symétrie, la linéarité à gauche implique la linéarité à droite. Ainsi φ est bilinéaire.
- Le caractère défini est une équivalence, c'est-à-dire que si $x = 0$ alors $\varphi(x, x) = 0$ (par linéarité à gauche ou à droite). De plus, si $x \in E$ vérifie $x \neq 0$ alors $\varphi(x, x) > 0$.

 **EXEMPLES 1** – Des produits scalaires usuels

■ **Produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n**

Pour tous $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (x_1, \dots, x_n)$ éléments de \mathbb{R}^n , on pose :

$$(x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Cette application est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n comme on peut facilement le vérifier. Il est appelé *produit scalaire canonique* de \mathbb{R}^n .

■ **Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$**

Pour $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$(A | B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j} = \text{Tr}(A^T B)$$

Cette application est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme on peut facilement le vérifier. Il est appelé *produit scalaire canonique* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

■ **Un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$**

Pour f et g deux fonctions de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, on pose :

$$(f | g) = \int_a^b f(t)g(t) dt$$

Cette application est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ comme on peut facilement le vérifier.

DÉFINITION 2 – Espace préhilbertien réel, espace euclidien

On appelle *espace préhilbertien réel* tout \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Lorsque l'espace vectoriel est de dimension finie, on parle d'*espace vectoriel euclidien*.

À partir de maintenant, E désigne un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $(\cdot | \cdot)$.

I. 2. NORME ASSOCIÉE À UN PRODUIT SCALAIRE

DÉFINITION 3 – Norme associée à un produit scalaire

On appelle *norme (euclidienne)* associée au produit scalaire (\cdot, \cdot) l'application :

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto \|x\| = \sqrt{(x|x)} \end{aligned}$$

REMARQUE Pour le moment, rien ne dit que la norme euclidienne est une norme. Mais nous y viendrons !

À partir de maintenant, E désigne un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $(\cdot | \cdot)$ et dont la norme associée est notée $\|\cdot\|$.

PROPOSITION 1 – *Identités remarquables*

Soient x et y deux éléments de E . On a :

(1) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$

(2) $(x|y) = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$ (*identité de polarisation*)

REMARQUE La norme euclidienne est définie à partir du produit scalaire. Réciproquement, l'identité de polarisation montre que, connaissant la norme euclidienne, on retrouve le produit scalaire.

PROPOSITION 2 – *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

La norme euclidienne $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad |(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$$

De plus, il y a égalité si et seulement si x et y sont proportionnels, c'est-à-dire si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda y$.

EXEMPLES

- Sur \mathbb{R}^n muni du produit scalaire canonique, on a, pour tous $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ de \mathbb{R}^n :

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

- Sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire présenté précédemment, on a, pour deux fonctions f et g :

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt}$$

PROPOSITION 3 – *La norme euclidienne... est une norme*

La norme euclidienne est une norme sur E .

⚙️ **EXERCICE 2** – *Cas d'égalité pour l'inégalité triangulaire*

Si x et y sont des vecteurs de E , montrer que l'on a $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ si et seulement si x et y sont positivement proportionnels, c'est-à-dire si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $y = \lambda x$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $x = \lambda y$.

II. ORTHOGONALITÉ

II. 1. FAMILLES ORTHOGONALES ET ORTHONORMÉES

DÉFINITION 4 – *Vecteur normé*

Un vecteur x de E est dit *normé* s'il est de norme 1, c'est-à-dire si $\|x\| = 1$.

DÉFINITION 5 – *Vecteurs orthogonaux*

On dit que deux vecteurs x et y de E sont *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul, c'est-à-dire si $(x|y) = 0$. On note alors $x \perp y$.

REMARQUES 1

- Le produit scalaire étant symétrique, la notion d'orthogonalité l'est aussi, c'est-à-dire que $x \perp y$ si et seulement si $y \perp x$.
- Le vecteur nul est orthogonal à tous les autres vecteurs.
- Un vecteur x est orthogonal à lui-même si et seulement si il est nul.

EXEMPLES 3

- (1) Dans \mathbb{R}^n muni du produit scalaire canonique, montrer que les vecteurs de la base canonique sont orthogonaux deux à deux et normés.
- (2) Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, montrer que les matrices élémentaires sont orthogonales deux à deux et normées.

DÉFINITION 6 – Famille orthogonale, orthonormée

Soit $\mathcal{F} = (x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .

- On dit que la famille \mathcal{F} est *orthogonale* si les vecteurs la constituant sont deux à deux orthogonaux, c'est-à-dire si pour tous $i, j \in I$ avec $i \neq j$ on a $(x_i | x_j) = 0$.
- On dit que la famille \mathcal{F} est *orthonormée* (ou *orthonormale*) si les vecteurs la constituant sont deux à deux orthogonaux et normés, c'est-à-dire si pour tous $i, j \in I$ on a $(x_i | x_j) = \delta_{i,j}$.

NOTATION On rappelle la notation du symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ qui vaut 0 si $i \neq j$ et 1 si $i = j$.

PROPOSITION 4 – Lien entre orthogonalité et liberté

Soit (e_1, \dots, e_n) une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E .
Alors la famille (e_1, \dots, e_n) est libre.

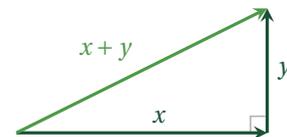
REMARQUES

- L'hypothèse de non nullité des vecteurs est importante puisque toute famille de vecteurs contenant le vecteur nul est liée.
- Le résultat est en particulier valable pour une famille orthonormée puisque les vecteurs la constituant sont orthogonaux et non nuls.

THÉORÈME 1 – Théorème de Pythagore

Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si et seulement si l'on a :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$



REMARQUE Ainsi, trois points A, B et C du plan forment un triangle rectangle en A si et seulement si \vec{AB} et \vec{AC} sont orthogonaux, c'est-à-dire si et seulement si $\|\vec{BC}\|^2 = \|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2$.

PROPOSITION 5 – Généralisation du théorème de Pythagore

Soit (e_1, \dots, e_n) une famille orthogonale de vecteurs de E . Alors :

$$\left\| \sum_{i=1}^n e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|e_i\|^2$$

THÉORÈME 2 – Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E .

Alors il existe une famille orthonormée (f_1, \dots, f_n) de vecteurs de E telle que :

$$\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_p)$$

REMARQUE Si (e_1, \dots, e_n) est une base de E , alors le résultat (f_1, \dots, f_n) de l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est également une base de E . En effet, la famille (f_1, \dots, f_n) est libre puisque orthogonale et génératrice de E puisque $\text{Vect}(f_1, \dots, f_n) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = E$.

MÉTHODE – Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

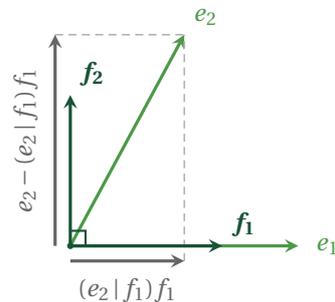
L'algorithme a été présenté dans la preuve précédente.

Si (e_1, \dots, e_n) est une famille libre de E , on souhaite construire une famille orthonormée (f_1, \dots, f_n) de vecteurs de E vérifiant $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_p)$ pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On procède de la façon suivante :

(1) On pose $f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$.

(2) Pour $k \geq 2$, les vecteurs f_1, \dots, f_{k-1} ayant déjà été construits, on pose :

$$f_k = \frac{e_k - \sum_{i=1}^{k-1} (e_k | f_i) f_i}{\left\| e_k - \sum_{i=1}^{k-1} (e_k | f_i) f_i \right\|}$$



EXEMPLE 4

Sur $\mathbb{R}_2[X]$, on définit, pour $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, le produit scalaire :

$$\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$$

Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt sur la famille libre $(1, X, X^2)$ pour déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire φ .

II. 2. ORTHOGONAL D'UN SOUS-ESPACE VECTORIEL

DÉFINITION 7 – Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Soit F un sous-espace vectoriel de E .

On appelle *orthogonal de F* l'ensemble de E noté F^\perp défini par :

$$F^\perp = \{x \in E, \forall f \in F, (x | f) = 0\}$$

EXEMPLE 5

Déterminer E^\perp et $\{0\}^\perp$.

PROPOSITION 6 – L'orthogonal est un sous-espace vectoriel

Soit F un sous-espace vectoriel de E .

Alors F^\perp est un sous-espace vectoriel de E .

PROPOSITION 7 – Manipulation des orthogonaux

Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E . Alors :

- (1) Si $F \subset G$ alors $G^\perp \subset F^\perp$.
- (2) $F \subset (F^\perp)^\perp$

II. 3. BASES ORTHONORMÉES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

Dans cette partie, E désigne un espace euclidien de dimension n . Le produit scalaire et la norme associée sont toujours notés $(\cdot | \cdot)$ et $\| \cdot \|$.

DÉFINITION 8 – Base orthonormée

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E .

On dit que \mathcal{B} est une *base orthonormée* (ou *base orthonormale*) de E si \mathcal{B} est une base de E et si la famille \mathcal{B} est orthonormée.

PROPOSITION 8 – Existence de bases orthonormées

Tout espace euclidien E admet une base orthonormée.

PROPOSITION 9 – Coordonnées dans une base orthonormée

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et x un vecteur de E . Alors :

$$x = \sum_{i=1}^n (x | e_i) e_i$$

Autrement dit, les coordonnées de x dans la base \mathcal{B} sont les $((x | e_i))_{1 \leq i \leq n}$.

PROPOSITION 10 – Expressions du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et x et y deux vecteurs de E . On suppose que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ et on note X et Y les matrices colonnes des coordonnées de x et y dans la base \mathcal{B} . Alors :

$$(x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = X^T Y \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = X^T X$$

PROPOSITION 11 – Matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormée

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E dont la matrice dans la base \mathcal{B} est notée $M_{\mathcal{B}}(u) = (m_{i,j})$. Alors :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad m_{i,j} = (u(e_j) | e_i)$$

III. PROJECTION ORTHOGONALE SUR UN SOUS-ESPACE DE DIMENSION FINIE

Dans cette partie, E désigne un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $(\cdot | \cdot)$ et dont la norme associée est notée $\| \cdot \|$.

III. 1. SUPPLÉMENTAIRE ORTHOGONAL

DÉFINITION 9 – Sous-espaces orthogonaux

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .
On dit que F et G sont *orthogonaux* si :

$$\forall (x, y) \in F \times G, \quad (x | y) = 0$$

EXEMPLE 6

Si F est un sous-espace vectoriel de E , montrer que les sous-espaces vectoriels F et F^\perp sont orthogonaux.

PROPOSITION 12 – Supplémentaire orthogonal

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E .
Alors les sous-espaces vectoriels F et F^\perp sont supplémentaires, c'est-à-dire que $E = F \oplus F^\perp$.
Le sous-espace vectoriel F^\perp est appelé le *supplémentaire orthogonal* de F .

REMARQUE Cela n'est pas valable en général si F n'est pas de dimension finie.

PROPOSITION 13 – Dimension du supplémentaire orthogonal en dimension finie

Soit F un sous-espace vectoriel de E avec E est de dimension finie. Alors :

- (1) $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$
- (2) $(F^\perp)^\perp = F$

REMARQUES

- En dimension finie, le supplémentaire orthogonal d'une droite est un hyperplan, et le supplémentaire orthogonal d'un hyperplan est une droite.
- En dimension infinie, l'inclusion $F \subset (F^\perp)^\perp$ peut être stricte.

EXEMPLES 7

- (1) Dans le plan \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire canonique, on considère une droite D d'équation $ax + by = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Déterminer D^\perp et en donner une base.
- (2) Dans l'espace \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique, on considère un plan P d'équation $ax + by + cz = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Déterminer P^\perp et en donner une base.

III. 2. PROJECTION ORTHOGONALE

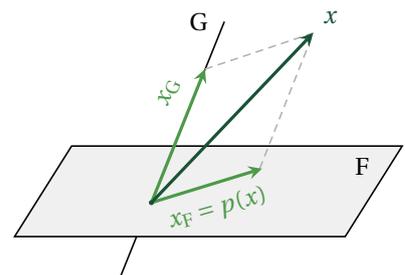
On commence par rappeler la définition d'une projection associée à une décomposition en somme directe de E .

RAPPEL

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$.
On appelle *projection sur F parallèlement à G* l'unique endomorphisme p de E tel que :

$$\forall x \in F, \quad p(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in G, \quad p(x) = 0$$

Ainsi, si x se décompose sous la forme $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$ selon la somme directe $E = F \oplus G$, on a $p(x) = x_F$.



DÉFINITION 10 – Projection orthogonale

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E .

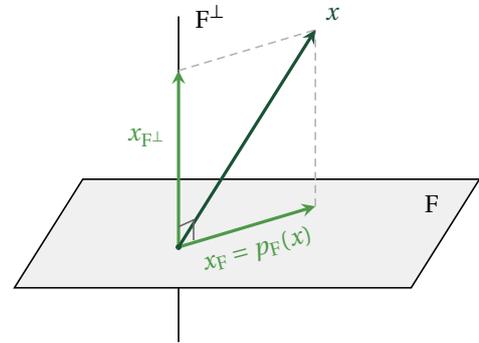
On appelle *projection orthogonale sur F* la projection sur F parallèlement à F^\perp .

VOCABULAIRE ET NOTATION

- L'image d'un vecteur x par la projection orthogonale sur F est appelée *projeté orthogonal de x sur F* .
- On note souvent p_F la projection orthogonale sur F .

REMARQUES

- Cette définition a un sens puisque l'on a bien $E = F \oplus F^\perp$ si F est de dimension finie.
- Si $x \in E$ se décompose en $x = x_F + x_{F^\perp}$ avec $x_F \in F$ et $x_{F^\perp} \in F^\perp$ selon la somme directe $E = F \oplus F^\perp$, alors on a $p_F(x) = x_F$, comme le montre l'illustration ci-contre.



PROPOSITION 14 – Expression du projeté orthogonal

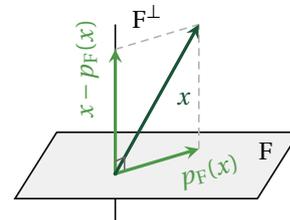
Soient F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F et x un vecteur de E . Le projeté orthogonal de x sur F est donné par :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p (x | e_i) e_i$$

PROPOSITION 15 – Caractérisation du projeté orthogonal

Soient F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E engendré par une famille (e_1, \dots, e_p) , x et y deux vecteurs de E et p_F la projection orthogonale sur F . Alors :

$$y = p_F(x) \iff \begin{cases} y \in F \\ \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, (x - y | e_i) = 0 \end{cases}$$



MÉTHODE – Détermination d'un projeté orthogonal

Soient F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $x \in E$. On cherche à obtenir l'expression du projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F .

- Si l'on connaît une base orthonormée de F , on utilise directement l'expression du projeté orthogonal.
- Si l'on connaît seulement une famille génératrice (e_1, \dots, e_p) de F , on utilise la caractérisation du projeté orthogonal :
 - (1) D'une part, on a $p_F(x) \in F$ de sorte que l'on peut écrire $p_F(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$.
 - (2) D'autre part, la traduction des égalités $(x - p_F(x) | e_i) = 0$ pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ donne un système à résoudre permettant de déterminer les $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$.

EXEMPLE 8

On munit $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire :

$$\forall f, g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \quad (f | g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

Pour $k \in [0, 2]$, on définit la fonction $f_k : t \mapsto t^k$ de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.
Déterminer le projeté orthogonal de f_2 sur $F = \text{Vect}(f_0, f_1)$.

III. 3. DISTANCE À UN SOUS-ESPACE VECTORIEL

DÉFINITION 11 – Distance à un sous-espace vectoriel

Soient F un sous-espace vectoriel de E et x un vecteur de E .
On appelle *distance de x à F* la quantité :

$$d(x, F) = \inf_{a \in F} \|x - a\|$$

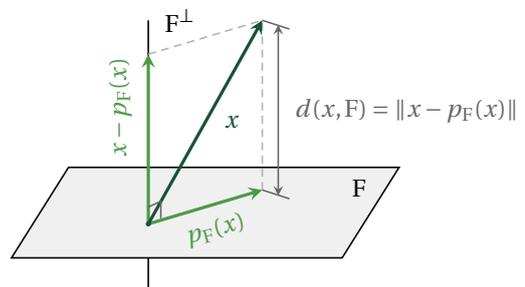
PROPOSITION 16 – Expression de la distance grâce au projeté orthogonal

Soient F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , x un vecteur de E et p_F la projection orthogonale sur F . Alors la distance $d(x, F)$ de x à F est atteinte en un unique point de F , à savoir $p_F(x)$. Autrement dit :

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$$

REMARQUES

- Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, la borne inférieure définissant la distance de x à F est donc atteinte, c'est un minimum. Ce n'est pas forcément le cas si F n'est pas de dimension finie.
- La situation est illustrée graphiquement sur le schéma ci-contre.



EXEMPLE 9

En interprétant la borne inférieure suivante comme une distance, calculer :

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$$

III. 4. FORMES LINÉAIRES SUR UN ESPACE EUCLIDIEN

Dans cette section, E est un espace euclidien.

PROPOSITION 17 – Représentation des formes linéaires

Soit φ une forme linéaire de E .
Alors il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = (a | x)$$

DÉFINITION 12 – Vecteur normal à un hyperplan

Soit H un hyperplan de E .

On appelle *vecteur normal* à H tout vecteur non nul de H^\perp .

PROPOSITION 18 – Distance d'un vecteur à un hyperplan

Soit H un hyperplan de E et u un vecteur normal à H .

La distance d'un vecteur x de E à H est donnée par :

$$d(x, H) = \frac{|(x|u)|}{\|u\|}$$

 **EXEMPLE 10**

Dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique, on se donne un point $M = (x, y, z)$ et un plan P d'équation cartésienne $ax + by + cz = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Prouver que :

$$d(M, P) = \frac{|ax + by + cz|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$