ESPACES PRÉHILBERTIENS ET EUCLIDIENS

Plan du cours

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$−espace vectoriel.

I. Produit scalaire et norme associée

I. 1. Produit scalaire

Définition 1 – *Produit scalaire*

On appelle *produit scalaire* sur E toute application $\varphi : \mathrm{E}\times\mathrm{E} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

- **Linéarité à gauche :** $\forall x, y, z \in \mathrm{E}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \varphi(\lambda x + y, z) = \lambda\varphi(x, z) + \varphi(y, z).$
- **Symétrie :** $\forall x, y \in \mathrm{E}, \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x).$
- **Positivité :** $\forall x \in \mathrm{E}, \quad \varphi(x, x) \geqslant 0.$
- **Caractère défini :** $\forall x \in \mathrm{E}, \quad \varphi(x, x) = 0 \implies x = 0.$

Notations Si φ est un produit scalaire et si $x, y \in \mathrm{E}$, alors le réel $\varphi(x, y)$ est appelé *le produit scalaire des vecteurs x et y*. On le note $(x|y)$, $\langle x, y\rangle$, $\langle x|y\rangle$ ou encore $x \cdot y$.

Vocabulaire Si le $\mathbb{R}$−espace vectoriel E est muni d'un produit scalaire, on dit que c'est un *espace préhilbertien*. S'il est de plus de dimension finie, on dit que c'est un *espace euclidien*.

Remarques

- Par symétrie, la linéarité à gauche implique la linéarité à droite. Ainsi φ est bilinéaire.
- Le caractère défini est une équivalence, c'est-à-dire que si $x = 0$ alors $\varphi(x, x) = 0$ (par linéarité à gauche ou à droite). De plus, si $x \in \mathrm{E}$ vérifie $x \neq 0$ alors $\varphi(x, x) > 0$.

Exemples 1 – *Des produits scalaires usuels*

- **Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$**

  Pour tous $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(x_1,\dots,x_n)$ éléments de $\mathbb{R}^n$, on pose :
  $$(x\,|\,y)=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i$$
  Cette application est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ comme on peut facilement le vérifier. Il est appelé *produit scalaire canonique* de $\mathbb{R}^n$.

- **Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$**

  Pour $\mathrm{A}=(a_{i,j})$ et $\mathrm{B}=(b_{i,j})$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :
  $$(\mathrm{A}\,|\,\mathrm{B})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}b_{i,j}=\mathrm{Tr}({}^t\mathrm{AB})$$
  Cette application est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme on peut facilement le vérifier. Il est appelé *produit scalaire canonique* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- **Un produit scalaire sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$**

  Pour f et g deux fonctions de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, on pose :
  $$(f\,|\,g)=\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$
  Cette application est un produit scalaire sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ comme on peut facilement le vérifier.

Proposition 1 – *Espace vectoriel des fonctions continues de carré intégrable*

Soit E le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions réelles continues et de carré intégrable sur un intervalle I.
On introduit l'application $\varphi:\mathrm{E}\times\mathrm{E}\to\mathbb{R}$ suivante :
$$\forall(f,g)\in\mathrm{E}^2,\quad \varphi(f,g)=\int_{\mathrm{I}}fg$$
Alors φ est un produit scalaire sur E.

Définition 2 – *Espace préhilbertien réel, espace euclidien*

On appelle *espace préhilbertien réel* tout $\mathbb{R}-$espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
Lorsque l'espace vectoriel est de dimension finie, on parle d'*espace vectoriel euclidien.*

À partir de maintenant, E désigne un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $(\cdot|\cdot)$.

I. 2. Norme associée à un produit scalaire

Définition 3 – *Norme associée à un produit scalaire*

On appelle *norme (euclidienne)* associée au produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ l'application :
$$\begin{array}{ccc}\mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+\\ x & \longmapsto & \|x\|=\sqrt{(x|x)}\end{array}$$

Remarque Pour le moment, rien ne dit que la norme euclidienne est une norme. Mais nous y viendrons !

À partir de maintenant, E désigne un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $(\cdot|\cdot)$ et dont la norme associée est notée $\|\cdot\|$.

Exercice 2 – *Une identité remarquable*

> Si x et y sont des vecteurs de E, démontrer que :
> $$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x\,|\,y) + \|y\|^2$$

Proposition 2 – *Identités de polarisation*

Soient x et y deux éléments de E. On a :

(1) $2(x\,|\,y) = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$

(2) $2(x\,|\,y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2$

(3) $4(x\,|\,y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$

On a également l'*identité du parallélogramme* :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Remarques

- L'identité du parallélogramme traduit le fait que, dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des deux diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des quatre côtés.
- La norme euclidienne est définie à partir du produit scalaire. Réciproquement, les identités de polarisation montrent que, connaissant la norme euclidienne, on retrouve le produit scalaire.

Proposition 3 – *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

La norme euclidienne $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire $(\cdot\,|\,\cdot)$ vérifie :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \quad \left|(x\,|\,y)\right| \leqslant \|x\|\,\|y\|$$

De plus, il y a égalité si et seulement si x et y sont proportionnels, c'est-à-dire si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda y$.

Exemples

- Sur $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, on a, pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$:
$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$
- Sur $\mathscr{C}([\,a, b\,], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire présenté précédemment, on a, pour deux fonctions f et g :
$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\;\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

Proposition 4 – *La norme euclidienne... est une norme*

La norme euclidienne est une norme sur E.

Exercice 3 – *Cas d'égalité pour l'inégalité triangulaire*

> Si x et y sont des vecteurs de E, montrer que l'on a $\|x+y\| = \|x\|+\|y\|$ si et seulement si x et y sont positivement proportionnels, c'est-à-dire si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $y = \lambda x$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $x = \lambda y$.

II. Orthogonalité

II. 1. Familles orthogonales et orthonormées

Définition 4 – *Vecteur normé*

Un vecteur x de E est dit *normé* s'il est de norme 1, c'est-à-dire si $\|x\| = 1$.

Définition 5 – *Vecteurs orthogonaux*

On dit que deux vecteurs x et y de E sont *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul, c'est-à-dire si $(x \mid y) = 0$.
On note alors $x \perp y$.

Remarques 1

- Le produit scalaire étant symétrique, la notion d'orthogonalité l'est aussi, c'est-à-dire que $x \perp y$ si et seulement si $y \perp x$.
- Le vecteur nul est orthogonal à tous les autres vecteurs.
- Un vecteur x est orthogonal à lui-même si et seulement si il est nul.

Exemples 4

> **(1)** Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, montrer que les vecteurs de la base canonique sont orthogonaux deux à deux et normés.
>
> **(2)** Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, montrer que les matrices élémentaires sont orthogonales deux à deux et normées.

Définition 6 – *Famille orthogonale, orthonormée*

Soit $\mathcal{F} = (x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que la famille $\mathcal{F}$ est *orthogonale* si les vecteurs la constituant sont deux à deux orthogonaux, c'est-à-dire si pour tous $i, j \in \mathrm{I}$ avec $i \neq j$ on a $(x_i \mid x_j) = 0$.
- On dit que la famille $\mathcal{F}$ est *orthonormée* (ou *orthonormale*) si les vecteurs la constituant sont deux à deux orthogonaux et normés, c'est-à-dire si pour tous $i, j \in \mathrm{I}$ on a $(x_i \mid x_j) = \delta_{i,j}$.

Notation On rappelle la notation du symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ qui vaut 0 si $i \neq j$ et 1 si $i = j$.

Proposition 5 – *Lien entre orthogonalité et liberté*

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E.
Alors la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre.

Remarques

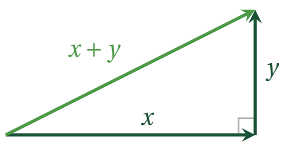
- L'hypothèse de non nullité des vecteurs est importante puisque toute famille de vecteurs contenant le vecteur nul est liée.

- Le résultat est en particulier valable pour une famille orthonormée puisque les vecteurs la constituant sont orthogonaux et non nuls.

THÉORÈME 1 – *Théorème de Pythagore*

Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si et seulement si l'on a :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$



REMARQUE Ainsi, trois points A, B et C du plan forment un triangle rectangle en A si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si et seulement si $\|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2$.

PROPOSITION 6 – *Généralisation du théorème de Pythagore*

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille orthogonale de vecteurs de E. Alors :

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2$$

THÉORÈME 2 – *Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*

Soit $\mathscr{F} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E.
Alors il existe une famille orthonormée $\left(f_1, \dots, f_n\right)$ de vecteurs de E telle que :

$$\forall p \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{Vect}\left(e_1, \dots, e_p\right) = \mathrm{Vect}\left(f_1, \dots, f_p\right)$$

REMARQUE Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors le résultat $\left(f_1, \dots, f_n\right)$ de l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est également une base de E. En effet, la famille $\left(f_1, \dots, f_n\right)$ est libre puisque orthogonale et génératrice de E puisque $\mathrm{Vect}\left(f_1, \dots, f_n\right) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \mathrm{E}$.

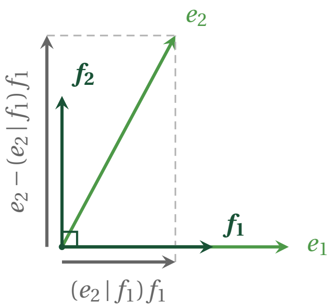
MÉTHODE – *Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*

L'algorithme a été présenté dans la preuve précédente.
Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de E, on souhaite construire une famille orthonormée $\left(f_1, \dots, f_n\right)$ de vecteurs de E vérifiant $\mathrm{Vect}\left(e_1, \dots, e_p\right) = \mathrm{Vect}\left(f_1, \dots, f_p\right)$ pour tout $p \in [\![1, n]\!]$. On procède de la façon suivante :

(1) On pose $f_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$.

(2) Pour $k \geqslant 2$, les vecteurs $f_1, \dots, f_{k-1}$ ayant déjà été construits, on pose :

$$f_k = \frac{e_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} (e_k \mid f_i) f_i}{\left\| e_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} (e_k \mid f_i) f_i \right\|}$$



EXEMPLE 5

Sur $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, on définit, pour $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, le produit scalaire :

$$\varphi(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \mathrm{P}(0)\mathrm{Q}(0) + \mathrm{P}(1)\mathrm{Q}(1) + \mathrm{P}(2)\mathrm{Q}(2)$$

Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt sur la famille libre $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ pour déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ muni du produit scalaire φ.

II. 2. Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Définition 7 – *Orthogonal d'un sous-espace vectoriel*

Soit F un sous-espace vectoriel de E.
On appelle *orthogonal de F* l'ensemble de E noté $F^{\perp}$ défini par :

$$F^{\perp} = \{x \in E, \ \forall f \in F, \ (x \mid f) = 0\}$$

Exemple 6

Déterminer $E^{\perp}$ et $\{0\}^{\perp}$.

Proposition 7 – *L'orthogonal est un sous-espace vectoriel*

Soit F un sous-espace vectoriel de E.
Alors $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 8 – *Manipulation des orthogonaux*

Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Alors :

(1) Si $F \subset G$ alors $G^{\perp} \subset F^{\perp}$.

(2) $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$

II. 3. Bases orthonormées d'un espace euclidien

Dans cette partie, E désigne un espace euclidien de dimension n. Le produit scalaire et la norme associée sont toujours notés $(\cdot \mid \cdot)$ et $\|\cdot\|$.

Définition 8 – *Base orthonormée*

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $\mathscr{B}$ est une *base orthonormée* (ou *base orthonormale*) de E si $\mathscr{B}$ est une base de E et si la famille $\mathscr{B}$ est orthonormée.

Proposition 9 – *Existence de bases orthonormées*

Tout espace euclidien E admet une base orthonormée.

Proposition 10 – *Coordonnées dans une base orthonormée*

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et x un vecteur de E. Alors :

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i) e_i$$

Autrement dit, les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$ sont les $((x \mid e_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Proposition 11 – *Expressions du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée*

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et x et y deux vecteurs de E. On suppose que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ et on note X et Y les matrices colonnes des coordonnées de x et y dans la base $\mathscr{B}$. Alors :

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = {}^t\mathrm{X}\mathrm{Y} \qquad \text{et} \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = {}^t\mathrm{X}\mathrm{X}$$

Proposition 12 – *Matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormée*

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est notée $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u) = (m_{i,j})$. Alors :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad m_{i,j} = (u(e_j) \mid e_i)$$

III. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Dans cette partie, E désigne un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $(\cdot|\cdot)$ et dont la norme associée est notée $\|\cdot\|$.

III. 1. Supplémentaire orthogonal

Définition 9 – *Sous-espaces orthogonaux*

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que F et G sont *orthogonaux* si :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}, \quad (x \mid y) = 0$$

Exemple 7

Si F est un sous-espace vectoriel de E, montrer que les sous-espaces vectoriels F et $\mathrm{F}^\perp$ sont orthogonaux.

Proposition 13 – *Supplémentaire orthogonal*

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
Alors les sous-espaces vectoriels F et $\mathrm{F}^\perp$ sont supplémentaires, c'est-à-dire que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp$.
Le sous-espace vectoriel $\mathrm{F}^\perp$ est appelé le *supplémentaire orthogonal* de F.

Remarque Cela n'est pas valable en général si F n'est pas de dimension finie.

Proposition 14 – *Dimension du supplémentaire orthogonal en dimension finie*

Soit F un sous-espace vectoriel de E avec E est de dimension finie. Alors :

(1) $\dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{F}^\perp = \dim \mathrm{E}$

(2) $(\mathrm{F}^\perp)^\perp = \mathrm{F}$

Remarques

- En dimension finie, le supplémentaire orthogonal d'une droite est un hyperplan, et le supplémentaire orthogonal d'un hyperplan est une droite.

- En dimension infinie, l'inclusion $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$ peut être stricte.

Exemples 8

(1) Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, on considère une droite D d'équation $ax + by = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Déterminer $D^{\perp}$ et en donner une base.

(2) Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère un plan P d'équation $ax+by+cz = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Déterminer $P^{\perp}$ et en donner une base.

III. 2. Projection orthogonale

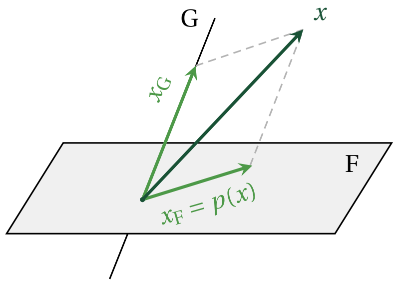
On commence par rappeler la définition d'une projection associée à une décomposition en somme directe de E.

Rappel

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$.
On appelle *projection sur* F *parallèlement à* G l'unique endomorphisme p de E tel que :

$$\forall x \in F, \quad p(x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in G, \quad p(x) = 0$$

Ainsi, si x se décompose sous la forme $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$ selon la somme directe $E = F \oplus G$, on a $p(x) = x_F$.



Définition 10 – *Projection orthogonale*

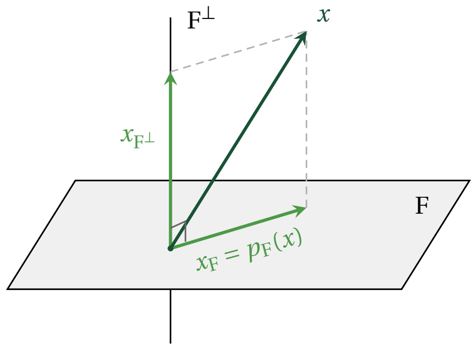
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
On appelle *projection orthogonale sur* F la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$.

Vocabulaire et notation

- L'image d'un vecteur x par la projection orthogonale sur F est appelée *projeté orthogonal de x sur* F.
- On note souvent p_F la projection orthogonale sur F.

Remarques

- Cette définition a un sens puisque l'on a bien $E = F \oplus F^{\perp}$ si F est de dimension finie.
- Si $x \in E$ se décompose en $x = x_F + x_{F^{\perp}}$ avec $x_F \in F$ et $x_{F^{\perp}} \in F^{\perp}$ selon la somme directe $E = F \oplus F^{\perp}$, alors on a $p_F(x) = x_F$, comme le montre l'illustration ci-contre.



Proposition 15 – *Expression du projeté orthogonal*

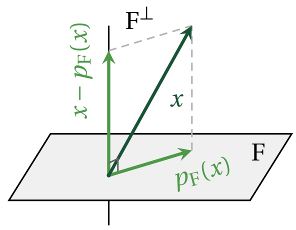
Soient F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de F et x un vecteur de E. Le projeté orthogonal de x sur F est donné par :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (x \mid e_i) e_i$$

Proposition 16 – *Caractérisation du projeté orthogonal*

Soient F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E engendré par une famille $(e_1,\ldots,e_p)$, x et y deux vecteurs de E et p_F la projection orthogonale sur F. Alors :

$$y = p_F(x) \iff \begin{cases} y \in F \\ \forall i \in [\![1,p]\!], \quad (x-y \mid e_i) = 0 \end{cases}$$



Méthode – *Détermination d'un projeté orthogonal*

Soient F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $x \in E$. On cherche à obtenir l'expression du projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F.

- Si l'on connaît une base orthonormée de F, on utilise directement l'expression du projeté orthogonal.
- Si l'on connaît seulement une famille génératrice $(e_1,\ldots,e_p)$ de F, on utilise la caractérisation du projeté orthogonal :

  (1) D'une part, on a $p_F(x) \in F$ de sorte que l'on peut écrire $p_F(x)$ sous la forme $p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$.

  (2) D'autre part, la traduction des égalités $(x - p_F(x) \mid e_i) = 0$ pour $i \in [\![1,p]\!]$ donne un système à résoudre permettant de déterminer les $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$.

Exemple 9

On munit $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire :

$$\forall f,g \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}), \quad (f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour $k \in [\![0,2]\!]$, on définit la fonction $f_k : t \mapsto t^k$ de $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$.
Déterminer le projeté orthogonal de f_2 sur $F = \mathrm{Vect}(f_0, f_1)$.

Proposition 17 – *Inégalité de Bessel*

Soient F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et p_F la projection orthogonale sur F. Alors :

$$\forall x \in E, \quad \|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$$

III. 3. Distance à un sous-espace vectoriel

Définition 11 – *Distance à un sous-espace vectoriel*

Soient F une sous-espace vectoriel de E et x un vecteur de E.
On appelle *distance de x à* F la quantité :

$$d(x,F) = \inf_{a\in F} \|x-a\|$$

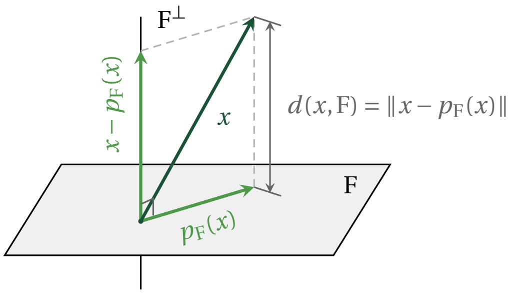
Proposition 18 – *Expression de la distance grâce au projeté orthogonal*

Soient F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, x un vecteur de E et p_F la projection orthogonale sur F. Alors la distance $d(x,F)$ de x à F est atteinte en un unique point de F, à savoir $p_F(x)$. Autrement dit :

$$d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$$

Remarques

- Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, la borne inférieure définissant la distance de x à F est donc atteinte, c'est un minimum. Ce n'est pas forcément le cas si F n'est pas de dimension finie.
- La situation est illustrée graphiquement sur le schéma ci-contre.



Exemple 10

En interprétant la borne inférieure suivante comme une distance, calculer :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 \, dt$$

III. 4. Formes linéaires sur un espace euclidien

Dans cette section, E est un espace euclidien.

Proposition 19 – *Représentation des formes linéaires*

Soit φ une forme linéaire de E.
Alors il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = (a \mid x)$$

Définition 12 – *Vecteur normal à un hyperplan*

Soit H un hyperplan de E.
On appelle *vecteur normal à* H tout vecteur non nul de $H^{\perp}$.

Proposition 20 – *Distance d'un vecteur à un hyperplan*

Soit H un hyperplan de E et u un vecteur normal à H.
La distance d'un vecteur x de E à H est donnée par :

$$d(x, H) = \frac{|(x \mid u)|}{\|u\|}$$

Exemple 11

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on se donne un point $M = (x, y, z)$ et un plan P d'équation cartésienne $ax + by + cy = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Prouver que :

$$d(M, P) = \frac{|ax + by + cz|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$