



PLAN DU COURS

I. ISOMÉTRIES VECTORIELLES	1
II. MATRICES ORTHOGONALES	2
III. ESPACES EUCLIDIENS ORIENTÉS	4
III. 1. Orientation	4
III. 2. Produit mixte	5
III. 3. Produit vectoriel en dimension 3	5
IV. ISOMÉTRIES VECTORIELLES EN DIMENSION 2	6
V. ISOMÉTRIES VECTORIELLES EN DIMENSION 3	8
VI. ENDOMORPHISMES AUTOADJOINTS, MATRICES SYMÉTRIQUES	10

Dans ce chapitre, E désigne un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ dont le produit scalaire et la norme associée sont notés respectivement $(\cdot | \cdot)$ et $\| \cdot \|$.

I. ISOMÉTRIES VECTORIELLES

DÉFINITION 1 – Isométrie vectorielle

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E .

On dit que u est une *isométrie vectorielle* s'il conserve la norme, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|$$

EXERCICE 1

On se donne $u \in \mathcal{L}(E)$ une isométrie de E . Quelles sont les valeurs propres possibles de u ?

PROPOSITION 1 – Bijectivité des isométries vectorielles

Toute isométrie vectorielle $u \in \mathcal{L}(E)$ est un automorphisme de E .

PROPOSITION 2 – Caractérisation des isométries par le produit scalaire

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E .

Alors u est une isométrie vectorielle si et seulement s'il conserve le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (u(x) | u(y)) = (x | y)$$

VOCABULAIRE Étant donnés les deux résultats précédents, une isométrie vectorielle est également parfois appelée *automorphisme orthogonal*.

 **EXEMPLES 2**

- (1) On rappelle qu'une homothétie de E est un endomorphisme de E pouvant s'écrire λid_E avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer les homothéties de E qui sont des isométries vectorielles.
- (2) Déterminer les projections orthogonales de E qui sont des isométries vectorielles.

PROPOSITION 3 – *Caractérisation des isométries par l'image d'une base orthonormée*

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E et \mathcal{B} une base orthonormée de E . Alors u est une isométrie vectorielle si et seulement si l'image par u de \mathcal{B} est une base orthonormée de E .

PROPOSITION 4 – *Opérations sur les isométries*

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in \mathcal{L}(E)$ deux isométries vectorielles de E . Alors :

- **Composition :** $u \circ v$ est une isométrie vectorielle.
- **Réciproque :** u^{-1} est une isométrie vectorielle.

DÉFINITION 2 – *Groupe orthogonal $O(E)$*

L'ensemble des isométries vectorielles de E est noté $O(E)$ et est appelé *groupe orthogonal* de E .

PROPOSITION 5 – *Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable*

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ une isométrie vectorielle de E et F un sous-espace vectoriel de E . Si F est stable par u alors F^\perp est stable par u .

DÉFINITION 3 – *Symétrie orthogonale*

Soit F un sous-espace vectoriel de E . On appelle *symétrie orthogonale par rapport à F* la symétrie par rapport à F et parallèlement à F^\perp .

REMARQUES

- Si x se décompose en $x = x_F + x_{F^\perp}$ dans la somme directe $E = F \oplus F^\perp$, la symétrie orthogonale s_F par rapport à F renvoie donc $s_F(x) = x_F - x_{F^\perp}$.
- Lorsque F est un hyperplan, on parle aussi de *réflexion*.

II. MATRICES ORTHOGONALES

DÉFINITION 4 – *Matrice orthogonale*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. On dit que M est une matrice *orthogonale* si l'endomorphisme de \mathbb{R}^n (muni du produit scalaire canonique) qui lui est canoniquement associé est une isométrie vectorielle.

PROPOSITION 6 – *Caractérisation des matrices orthogonales*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) M est une matrice orthogonale.
- (2) $M^T M = I_n$.
- (3) M est inversible et $M^{-1} = M^T$.
- (4) $MM^T = I_n$.
- (5) Les vecteurs lignes de M forment une base orthonormée de \mathbb{R}^n .
- (6) Les vecteurs colonnes de M forment une base orthonormée de \mathbb{R}^n .

REMARQUES

- Lorsqu'une matrice est orthogonale, il est facile de calculer son inverse puisqu'il suffit de la transposer.
- Pour vérifier qu'une matrice est orthogonale, le critère (5) précédent montre qu'il suffit de vérifier que les n normes des colonnes sont égales à 1 et que les $n(n-1)/2$ produits scalaires des colonnes prises deux à deux sont égaux à 0.

 **EXEMPLE 3**

Vérifier que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ est orthogonale.

PROPOSITION 7 – *Caractérisation comme matrices de changement de base orthonormée*

Soient \mathcal{B} une base orthonormée de E et \mathcal{B}' une base de E .

Alors la base \mathcal{B}' est orthonormée si et seulement si la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' est orthogonale.

Ainsi une matrice M est orthogonale si et seulement si c'est une matrice de passage entre deux bases orthonormées de \mathbb{R}^n .

PROPOSITION 8 – *Caractérisation des isométries vectorielles*

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E et \mathcal{B} une base orthonormée de E .

Alors u est une isométrie vectorielle si et seulement si sa matrice dans la base \mathcal{B} est orthogonale.

PROPOSITION 9 – *Opérations sur les matrices orthogonales*

Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices orthogonales. Alors :

- **Produit :** MN est une matrice orthogonale.
- **Inverse :** M^{-1} est une matrice orthogonale.

DÉFINITION 5 – *Groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$*

L'ensemble des matrices orthogonales est noté $O_n(\mathbb{R})$ ou $O(n)$ et est appelé *groupe orthogonal*.

PROPOSITION 10 – Déterminant d'une matrice orthogonale

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale.
Alors $\det M = \pm 1$.

REMARQUE La caractérisation des isométries vectorielles à l'aide de leurs matrices dans une base orthonormée donne que le déterminant d'une isométrie vectorielle est, lui aussi, égal à ± 1 .

⚙️ **EXERCICE 4**

Montrer que la réciproque de la proposition précédente est fautive dès que $n \geq 2$.

DÉFINITION 6 – Groupe spécial orthogonal $SO_n(\mathbb{R})$

L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1 est noté $SO_n(\mathbb{R})$ ou $SO(n)$ et est appelé *groupe spécial orthogonal*.

VOCABULAIRE

- Une matrice orthogonale de déterminant 1 (resp. de déterminant -1) est appelée *matrice orthogonale positive* (resp. *matrice orthogonale négative*).
- Une isométrie vectorielle de déterminant 1 (resp. -1) est appelée *isométrie vectorielle directe* (resp. *isométrie vectorielle indirecte*).

REMARQUE On peut montrer que $SO_n(\mathbb{R})$ est stable par produit et passage à l'inverse, ce qui n'est pas le cas de l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant -1 .

III. ESPACES EUCLIDIENS ORIENTÉS

III. 1. ORIENTATION

DÉFINITION 7 – Bases définissant la même orientation

Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases orthonormées de E .
On dit que \mathcal{B} et \mathcal{B}' définissent la même orientation si la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' appartient à $SO_n(\mathbb{R})$.

REMARQUES

- On a déjà montré que la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' appartient à $O_n(\mathbb{R})$ et on impose donc ici qu'elle soit de déterminant 1.
- On peut montrer que la relation « définir la même orientation » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases orthonormées de E .

DÉFINITION 8 – Orientation d'un espace euclidien

On dit que l'on oriente l'espace E lorsque l'on choisit une base orthonormée \mathcal{B}_0 de E et qu'on la déclare *directe*.
Dès lors, si \mathcal{B} est une base orthonormée de E :

- La base \mathcal{B} est dite *directe* si elle définit la même orientation que la base \mathcal{B}_0 ;
- La base \mathcal{B} est dite *indirecte* sinon.

REMARQUE Il n'y a donc que deux orientations possibles sur l'espace E .

EXEMPLE Sur \mathbb{R}^n muni de son produit scalaire canonique, on oriente très souvent l'espace en décrétant que la base canonique est directe.

III. 2. PRODUIT MIXTE

PROPOSITION 11 – *Déterminant dans une base orthonormée directe*

On suppose l'espace E orienté et on se donne \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases orthonormées directes de E . Alors on a :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \quad \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n)$$

DÉFINITION 9 – *Produit mixte*

On suppose l'espace E orienté et on se donne x_1, \dots, x_n une famille de n vecteurs de E . On appelle *produit mixte des n vecteurs x_1, \dots, x_n* leur déterminant dans n'importe quel base orthonormée directe de E . On le note $[x_1, \dots, x_n]$.

REMARQUE La bonne définition du produit mixte découle de la proposition précédente.

REMARQUE – *Interprétation géométrique du produit mixte*

Dans le plan \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire canonique, on note e_1 et e_2 les vecteurs de la base canonique que l'on suppose directe. On a, en calculant le produit mixte dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2)$ qui est orthonormée directe :

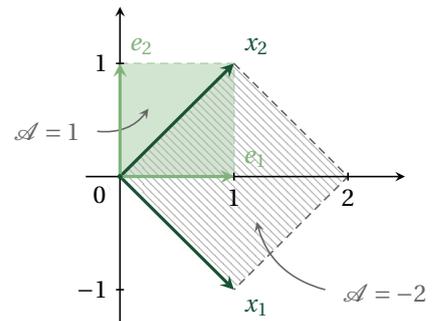
$$[e_1, e_2] = \det_{\mathcal{B}_c}(e_1, e_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

qui représente l'aire algébrique du parallélogramme construit sur les vecteurs e_1 et e_2 (dans cet ordre). De même, si $x_1 = (1, -1)$ et $x_2 = (1, 1)$ alors on a :

$$[x_2, x_1] = \det_{\mathcal{B}_c}(x_2, x_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

qui représente l'aire algébrique du parallélogramme construit sur les vecteurs x_2 et x_1 (dans cet ordre).

Dans le plan, le produit mixte correspond donc géométriquement à une aire algébrique d'un parallélogramme. Le même type d'interprétation peut être faite dans l'espace \mathbb{R}^3 pour des volumes algébriques de parallélépipèdes.



III. 3. PRODUIT VECTORIEL EN DIMENSION 3

Dans cette sous-partie, E est supposé orienté et de dimension $n = 3$.

PROPOSITION 12 – *Produit vectoriel*

Soient u et v deux vecteurs de E .

Il existe un unique vecteur de E , noté $u \wedge v$ et appelé *produit vectoriel des vecteurs u et v* , tel que :

$$\forall w \in E, \quad [u, v, w] = (u \wedge v | w)$$

EXERCICE 5

Si u et v sont deux vecteurs de E , démontrer que $u \wedge v = -v \wedge u$.

PROPOSITION 13 – Propriétés du produit vectoriel

Soient u et v deux vecteurs de E . Alors :

- On a $u \wedge v = 0$ si et seulement si u et v sont colinéaires.
- Le produit vectoriel $u \wedge v$ est orthogonal aux vecteurs u et v .
- Si (u, v) est orthonormée, alors $(u, v, u \wedge v)$ est une base orthonormée directe de E .

EXEMPLE Dans l'espace \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique et orienté pour rendre la base canonique directe, on se donne deux vecteurs i et j unitaires et orthogonaux. Alors $(i, j, i \wedge j)$ est une base orthonormée directe de \mathbb{R}^3 et $(i, j, -i \wedge j) = (i, j, j \wedge i)$ une base orthonormée indirecte de \mathbb{R}^3 .

PROPOSITION 14 – Calcul du produit vectoriel

Soient u et v deux vecteurs de E , muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On note u_1, u_2, u_3 et v_1, v_2, v_3 les coordonnées de u et v dans la base \mathcal{B} . Alors :

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} e_3$$

REMARQUE On retrouve les composantes du produit vectoriel dans toute base orthonormée directe utilisées couramment en sciences physiques et industrielles.

IV. ISOMÉTRIES VECTORIELLES EN DIMENSION 2

Dans cette partie, E est un espace euclidien orienté de dimension 2.

PROPOSITION 15 – Description de $O_2(\mathbb{R})$

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors :

- M appartient à $SO_2(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- M appartient à $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

VOCABULAIRE Pour $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ est appelée *matrice de rotation d'angle θ* .

 **EXEMPLE 6**

On pose $X = (1 \ 0)^T \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Pour des valeurs « remarquables » de l'angle θ , calculer $R_\theta X$ et observer en quoi la dénomination « rotation d'angle θ » est cohérente.

PROPOSITION 16 – Produit de deux rotations

Pour $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, on a : $R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$.

 **EXEMPLES 7**

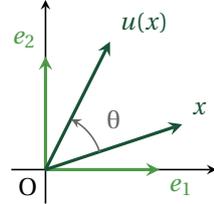
- (1) Montrer que deux matrices de $SO_2(\mathbb{R})$ commutent toujours.
- (2) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, montrer que R_θ est inversible et donner son inverse.

PROPOSITION 17 – Description des isométries directes du plan

Soient u un endomorphisme de E et \mathcal{B} une base orthonormée directe de E . Alors u appartient à $SO(E)$ si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que la matrice de u dans la base \mathcal{B} soit :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = R_\theta$$

Le réel θ , unique à 2π près, est le même pour toute base orthonormée directe \mathcal{B}' . On dit alors que u est la *rotation d'angle* θ et que θ est *l'angle de la rotation* u .



REMARQUES

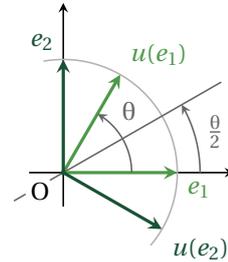
- Les résultats précédents montrent que si deux endomorphismes u et v de $SO(E)$ sont des rotations d'angles respectifs θ et θ' alors $u \circ v = v \circ u$ est une rotation d'angle $\theta + \theta'$.
- Dans toutes les bases orthonormées indirectes, on peut montrer que la matrice représentant u devient $R_{-\theta}$.

PROPOSITION 18 – Description des isométries indirectes du plan

Soient u un endomorphisme de E et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée de E . Alors u appartient à $O(E) \setminus SO(E)$ si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que la matrice de u dans la base \mathcal{B} soit :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

L'endomorphisme u est alors la symétrie (ou réflexion) orthogonale par rapport à la droite D_θ engendrée par le vecteur $d_\theta = \cos(\theta/2)e_1 + \sin(\theta/2)e_2$ et parallèlement à D_θ^\perp .



REMARQUE Dans ce cas, le réel θ dépend de la base orthonormée choisie.

CLASSIFICATION DES ISOMÉTRIES DU PLAN

Soit u une isométrie de E . On introduit l'ensemble $E_1 = \{x \in E, u(x) = x\}$ des points fixes de u qui n'est autre que l'espace propre E_1 de u associé à la valeur propre 1. Dès lors, les différents types d'isométries du plan que l'on peut obtenir sont :

- **Si $\dim(E_1) = 0$**
 u est une rotation dont on peut déterminer l'angle en se rappelant que dans toute base orthonormée directe, la première colonne de la matrice de u donne $\cos \theta$ et $\sin \theta$ (isométrie directe).
- **Si $\dim(E_1) = 1$**
 u est une symétrie orthogonale par rapport à la droite E_1 parallèlement à la droite E_1^\perp (isométrie indirecte).
- **Si $\dim(E_1) = 2$**
 u est l'identité (isométrie directe).

EXEMPLES 8

Vérifier que les matrices suivantes sont orthogonales et déterminer la nature géométrique de l'endomorphisme du plan \mathbb{R}^2 , muni du produit scalaire canonique, qui leur est canoniquement associé :

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

V. ISOMÉTRIES VECTORIELLES EN DIMENSION 3

Dans cette partie, E est un espace euclidien orienté de dimension 3.

PROPOSITION 19 – Expression matricielle des isométries en dimension 3

Soit u une isométrie de E.

- Si $u \in SO(E)$, il existe une base orthonormée directe dans laquelle la matrice de u est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R}$$

- Si $u \in O(E) \setminus SO(E)$, il existe une base orthonormée directe dans laquelle la matrice de u est :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R}$$

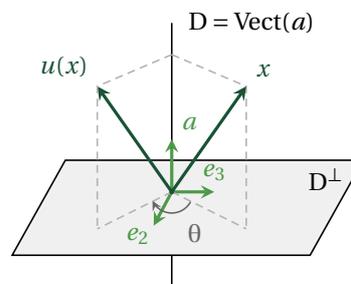
PROPOSITION 20 – Description des isométries directes en dimension 3

Soit u un endomorphisme de E.

Alors u appartient à $SO(E)$ si et seulement si il existe une base orthonormée directe \mathcal{B} de E dans laquelle la matrice de u s'écrit :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

En notant a un vecteur non nul de même sens que le premier vecteur de \mathcal{B} , le réel θ , unique à 2π près, est le même pour toute base orthonormée directe \mathcal{B}' commençant par $a/\|a\|$. On dit alors que u est la *rotation d'angle θ et d'axe dirigé par a* .



REMARQUES

- La rotation d'angle θ et d'axe dirigé par a est également la rotation d'angle $-\theta$ et d'axe dirigé par $-a$.
- Le vecteur a qui dirige et oriente l'axe de rotation n'est pas unique puisque tout vecteur λa pour $\lambda > 0$ convient aussi.

CLASSIFICATION DES ISOMÉTRIES DE L'ESPACE

Soit u une isométrie de E. On introduit l'ensemble $E_1 = \{x \in E, u(x) = x\}$ des points fixes de u qui n'est autre que l'espace propre E_1 de u associé à la valeur propre 1. Dès lors, les différents types d'isométries de l'espace que l'on peut obtenir sont :

- Si $\dim(E_1) = 0$**

Cette situation sort du cadre du programme mais on peut prouver que u est la composée (commutative) d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan et d'une rotation d'axe orthogonal à ce plan (isométrie indirecte).

- **Si $\dim(E_1) = 1$**
 u est une rotation d'angle θ et d'axe dirigé par un vecteur engendrant E_1 ; on verra plus loin comment déterminer précisément l'axe et l'angle de la rotation (isométrie directe).
- **Si $\dim(E_1) = 2$**
 u est une symétrie orthogonale par rapport au plan E_1 parallèlement à la droite E_1^\perp (isométrie indirecte).
- **Si $\dim(E_1) = 3$**
 u est l'identité (isométrie directe).

 **MÉTHODE** – Déterminer les éléments caractéristiques d'une rotation

On suppose donnée la matrice M dans une base orthonormée directe d'une isométrie vectorielle positive, c'est-à-dire telle que $\det(M) = 1$. D'après l'étude précédente, cette matrice représente forcément une rotation u dont on va chercher à déterminer l'axe et l'angle.

- (1) On détermine l'axe en cherchant la droite invariante, c'est-à-dire en explicitant l'ensemble E_1 des points fixes de u , qui n'est rien d'autre que l'espace propre E_1 de u associé à la valeur propre 1. On en choisit alors un vecteur directeur a ;
- (2) Par le résultat qui précède, dans toute base orthonormée directe \mathcal{B} commençant par le vecteur $a/\|a\|$, la matrice de u est :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

de sorte que l'on a la relation $\text{Tr} M = 1 + 2 \cos \theta$;

- (3) On détermine alors l'angle de la rotation autour de l'axe dirigé par a en utilisant le résultat qui suit qui affirme que $\sin \theta$ est du signe de $[a, x, u(x)]$ pour tout vecteur x non colinéaire à a .

PROPOSITION 21 – Un résultat permettant de déterminer le signe de l'angle d'une rotation

Soit u un endomorphisme de E . On suppose que u est la rotation d'angle θ et d'axe dirigé par a . Alors $\sin \theta$ est du signe de $[a, x, u(x)]$ pour tout vecteur x non colinéaire à a .

 **EXEMPLE 9**

Montrer que la matrice suivante est orthogonale et déterminer la nature géométrique de l'endomorphisme de l'espace \mathbb{R}^3 , muni du produit scalaire canonique, qui lui est canoniquement associé :

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

 **MÉTHODE** – Déterminer la matrice d'une rotation

À l'inverse, on suppose donnés l'angle θ et un vecteur directeur a de l'axe d'une rotation u de E et on cherche à retrouver la matrice de la rotation dans la base canonique \mathcal{B}_c de \mathbb{R}^3 .

- (1) On crée une base orthonormée directe dont le premier vecteur est colinéaire à a . Typiquement, on prend x un vecteur orthogonal à a et, en posant $a^* = a/\|a\|$ et $x^* = x/\|x\|$, on considère la base orthonormée directe $\mathcal{B} = (a^*, x^*, a^* \wedge x^*)$.
- (2) Dans cette base orthonormée directe, la matrice de u est :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- (3) On explicite la matrice de passage P de la base canonique \mathcal{B}_c vers la base \mathcal{B} et on conclut en écrivant que $M_{\mathcal{B}_c}(u) = PM_{\mathcal{B}}(u)P^{-1}$.

 **EXEMPLE 10**

Déterminer la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 de la rotation u d'angle $\pi/2$ et d'axe dirigé par le vecteur $a = (1, 1, 2)$.

VI. ENDOMORPHISMES AUTOADJOINTS, MATRICES SYMÉTRIQUES

Dans cette partie, E est de nouveau un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

DÉFINITION 10 – *Endomorphisme autoadjoint*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E .

On dit que u est *autoadjoint* (ou *symétrique*) s'il vérifie :

$$\forall x, y \in E, \quad (u(x) | y) = (x | u(y))$$

NOTATION L'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E est noté $S(E)$.

 **EXEMPLES 11**

Montrer que toute homothétie de E est un endomorphisme autoadjoint.

PROPOSITION 22 – *Caractérisation des projections orthogonales*

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur de E .

Alors p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est autoadjoint.

PROPOSITION 23 – *Structure de $S(E)$*

L'ensemble $S(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

PROPOSITION 24 – *Matrices des endomorphismes autoadjoints*

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E et \mathcal{B} une base orthonormée de E .

Alors u est un endomorphisme autoadjoint si et seulement si sa matrice dans la base \mathcal{B} est symétrique.

REMARQUE 1 Le fait que la base \mathcal{B} soit orthonormée est important.

PROPOSITION 25 – *Isomorphisme entre $S(E)$ et $S_n(\mathbb{R})$*

Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E . Alors l'application :

$$\begin{aligned} S(E) &\longrightarrow S_n(\mathbb{R}) \\ u &\longmapsto M_{\mathcal{B}}(u) \end{aligned}$$

est un isomorphisme. En particulier, la dimension de $S(E)$ est $n(n+1)/2$.

PROPOSITION 26

Soit u un endomorphisme autoadjoint de E .

Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u alors F^\perp est également stable par u .

PROPOSITION 27

Soient u un endomorphisme autoadjoint de E et λ et μ deux valeurs propres distinctes de u .

Alors les sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont orthogonaux.

THÉORÈME 1 – Théorème spectral

Soit u un endomorphisme autoadjoint de E .

Alors il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de u .

REMARQUES

- Autrement dit, tout endomorphisme autoadjoint est diagonalisable dans une base orthonormée.
- Le résultat équivaut au fait que E est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u .

THÉORÈME 2 – Interprétation matricielle du théorème spectral

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.

Alors il existe une matrice diagonale réelle D et une matrice orthogonale $P \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $P^{-1}AP = D$.

REMARQUES

- En d'autres termes, toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée.
- On rappelle que, puisque $P \in O_n(\mathbb{R})$, on a $P^{-1} = P^T$.
- Le fait que la matrice A soit réelle est important comme le montre l'exemple suivant.

EXEMPLE 12

Étudier la diagonalisabilité de $M = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$.

MÉTHODE – Diagonalisation d'une matrice symétrique réelle

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. On souhaite diagonaliser A dans une base orthonormée.

- (1) On commence par indiquer que A est symétrique réelle de sorte que A est diagonalisable dans une base orthonormée par le théorème spectral.
- (2) On détermine les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de A en calculant son polynôme caractéristique et en déterminant ses racines. On détermine ensuite des bases des sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ de A en résolvant, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, les systèmes $AX = \lambda X$ pour λ dans $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.
- (3) On utilise alors l'algorithme de Gram-Schmidt afin de rendre les bases des sous-espaces propres orthonormées, si elles ne le sont pas déjà.
- (4) Enfin, on conclut :
 - On donne la matrice de passage P de la base orthonormée de départ vers une base orthonormée formée de vecteurs propres de A que l'on constitue en concaténant les bases orthonormées des sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ trouvées à l'étape (3). À noter que les vecteurs propres associés à

des valeurs propres distinctes sont orthogonaux en vertu de la **PROPOSITION 27**.

REMARQUE La matrice P est bien orthogonale puisque c'est une matrice de passage d'une base orthonormée vers une autre.

- On donne la matrice D diagonale vérifiant $P^{-1}AP = D$. Les éléments diagonaux de D sont les valeurs propres de A énumérées avec leurs ordres de multiplicité.

REMARQUE Les valeurs propres de A sur la diagonale de D apparaissent dans le même ordre que celui utilisé pour concaténer les bases des sous-espaces propres de A .

 **EXEMPLE 13**

Étudier si la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans une base orthonormée.

DÉFINITION 11 – *Endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs*

Soit u un endomorphisme autoadjoint de E .

- On dit que u est *positif* si : $\forall x \in E, (x | u(x)) \geq 0$.
- On dit que u est *défini positif* si : $\forall x \in E \setminus \{0\}, (x | u(x)) > 0$.

NOTATION L'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs de E seront notés respectivement $S^+(E)$ et $S^{++}(E)$.

DÉFINITION 12 – *Matrices symétriques positives et définies positives*

Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

- On dit que M est *positive* si : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T M X \geq 0$.
- On dit que M est *définie positive* si : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, X^T M X > 0$

NOTATION L'ensemble des matrices symétriques positives et définies positives seront notés respectivement $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

REMARQUE – *Lien entre les deux définitions*

Soient $M \in S_n(\mathbb{R})$ la matrice d'un endomorphisme autoadjoint u dans une base orthonormée \mathcal{B} , x un vecteur de E et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne le représentant dans la base \mathcal{B} . Alors on a $X^T M X = (u | u(x))$. La définition précédente n'est donc que l'adaptation matricielle naturelle de la définition la précédant.

PROPOSITION 28 – *Caractérisation spectrale des matrices symétriques positives et définies positives*

Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors :

- M est positive si et seulement si $\text{sp}(M) \subset \mathbb{R}_+$.
- M est définie positive si et seulement si $\text{sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$.

REMARQUE Un résultat similaire peut être énoncé pour caractériser les endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs.