# ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

## Plan du cours

I. Isométries vectorielles 1

II. Matrices orthogonales 2

III. Espaces euclidiens orientés 4
- III. 1. Orientation . . . . 4
- III. 2. Produit mixte . . . . 5
- III. 3. Produit vectoriel en dimension 3 . . . . 5

IV. Isométries vectorielles d'un plan euclidien 6

V. Isométries vectorielles d'un espace euclidien de dimension 3 8

VI. Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques 10

Dans ce chapitre, E désigne un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ dont le produit scalaire et la norme associée sont notés respectivement $(\cdot|\cdot)$ et $\|\cdot\|$.

## I. Isométries vectorielles

**Définition 1** – *Isométrie vectorielle*

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ une endomorphisme de E.
On dit que $u$ est une *isométrie vectorielle* s'il conserve la norme, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \|u(x)\| = \|x\|$$

**Exercice 1**

On se donne $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ une isométrie de E.
Déterminer les valeurs propres possibles d'une isométrie vectorielle.

**Proposition 1** – *Bijectivité des isométries vectorielles*

Toute isométrie vectorielle $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ est un automorphisme de E.

**PROPOSITION 2** – *Caractérisation des isométries par le produit scalaire*

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ une endomorphisme de E.
Alors $u$ est une isométrie vectorielle si et seulement s'il conserve le produit scalaire, c'est-à-dire si et seulement si on a :

$$\forall x, y \in \mathrm{E}, \quad (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$$

**VOCABULAIRE** Étant donnés les deux résultats précédents, une isométrie vectorielle est également parfois appelée *automorphisme orthogonal* (la proposition précédente montre qu'une isométrie vectorielle est un endomorphisme qui conserve l'orthogonalité).

**EXEMPLES 2**

**(1)** On rappelle qu'une homothétie de E est un endomorphisme de E pouvant s'écrire $\lambda \,\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer les homothéties de E qui sont des isométries vectorielles.

**(2)** Déterminer les projections orthogonales de E qui sont des isométries vectorielles.

**PROPOSITION 3** – *Caractérisation des isométries par l'image d'une base orthonormée*

Soient $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme de E et $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E.
Alors $u$ est une isométrie vectorielle si et seulement si l'image par $u$ de $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E.

**PROPOSITION 4** – *Opérations sur les isométries*

Soient $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $v \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ deux isométries vectorielles de E. Alors :

- **Composition :** $u \circ v$ est une isométrie vectorielle.
- **Réciproque :** $u^{-1}$ est une isométrie vectorielle.

**DÉFINITION 2** – *Groupe orthogonal* O(E)

L'ensemble des isométries vectorielles de E est noté O(E) et est appelé *groupe orthogonal* de E.

**PROPOSITION 5** – *Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable*

Soient $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ une isométrie vectorielle de E et F un sous-espace vectoriel de E.
Si F est stable par $u$ alors $\mathrm{F}^{\perp}$ est stable par $u$.

# II. MATRICES ORTHOGONALES

**DÉFINITION 3** – *Matrice orthogonale*

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice.
On dit que M est une matrice *orthogonale* si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (muni du produit scalaire canonique) qui lui est canoniquement associé est une isométrie vectorielle.

**Proposition 6** – *Caractérisation des matrices orthogonales*

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

**(1)** M est une matrice orthogonale.

**(2)** ${}^t\mathrm{M}\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$.

**(3)** M est inversible et $\mathrm{M}^{-1} = {}^t\mathrm{M}$.

**(4)** $\mathrm{M}\,{}^t\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$.

**(5)** Les vecteurs lignes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

**(6)** Les vecteurs colonnes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

### Remarques

- Lorsqu'une matrice est orthogonale, il est facile de calculer son inverse puisqu'il suffit de la transposer.
- Pour vérifier qu'une matrice est orthogonale, le critère **(5)** précédent montre qu'il suffit de vérifier que les $n$ normes des colonnes sont égales à 1 et que les $n(n-1)/2$ produits scalaires des colonnes prises deux à deux sont égaux à 0.

### Exemple 3

Vérifier que la matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ est orthogonale.

**Proposition 7** – *Caractérisation comme matrices de changement de base orthonormée*

Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et $\mathscr{B}'$ une base de E.
Alors la base $\mathscr{B}'$ est orthonormée si et seulement si la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est orthogonale.
Ainsi une matrice M est orthogonale si et seulement si c'est une matrice de passage entre deux bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$.

**Proposition 8** – *Caractérisation des isométries vectorielles*

Soient $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme de E et $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E.
Alors $u$ est une isométrie vectorielle si et seulement si sa matrice dans la base $\mathscr{B}$ est orthogonale.

**Proposition 9** – *Opérations sur les matrices orthogonales*

Soient $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{N} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices orthogonales. Alors :

- **Produit :** MN est une matrice orthogonale.
- **Inverse :** $\mathrm{M}^{-1}$ est une matrice orthogonale.

**Définition 4** – *Groupe orthogonal* $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$

L'ensemble des matrices orthogonales est noté $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{O}(n)$ et est appelé *groupe orthogonal.*

**Proposition 10** – *Déterminant d'une matrice orthogonale*

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale.
Alors $\det M = \pm 1$.

**Remarque** La caractérisation des isométries vectorielles à l'aide de leurs matrices dans une base orthonormée donne que le déterminant d'une isométrie vectorielle est, lui aussi, égal à $\pm 1$.

**Exercice 4**

Montrer que la réciproque de la proposition précédente est fausse dès que $n \geqslant 2$.

**Définition 5** – *Groupe spécial orthogonal* $SO_n(\mathbb{R})$

L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1 est noté $SO_n(\mathbb{R})$ ou $SO(n)$ et est appelé *groupe spécial orthogonal.*

**Vocabulaire**

- Une matrice orthogonale de déterminant 1 (resp. de déterminant $-1$) est appelée *matrice orthogonale positive* (resp. *matrice orthogonale négative*).
- Une isométrie vectorielle de déterminant 1 (resp. $-1$) est appelée *isométrie vectorielle directe* (resp. *isométrie vectorielle indirecte*).

**Remarque** On peut montrer que $SO_n(\mathbb{R})$ est stable par produit et passage à l'inverse, ce qui n'est pas le cas de l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant $-1$.

# III. Espaces euclidiens orientés

## III. 1. Orientation

**Définition 6** – *Bases définissant la même orientation*

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases orthonormées de E.
On dit que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ *définissent la même orientation* si la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ appartient à $SO_n(\mathbb{R})$.

**Remarques**

- On a déjà montré que la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ appartient à $O_n(\mathbb{R})$ et on impose donc ici qu'elle soit de déterminant 1.
- On peut montrer que la relation « *définir la même orientation* » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases orthonormées de E.

**Définition 7** – *Orientation d'un espace euclidien*

On dit que l'on *oriente l'espace* E lorsque l'on choisit une base orthonormée $\mathscr{B}_0$ de E et qu'on la décrète *directe*. Dès lors, si $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E :

- La base $\mathscr{B}$ est dite *directe* si elle définit la même orientation que la base $\mathscr{B}_0$ ;
- La base $\mathscr{B}$ est dite *indirecte* sinon.

**Remarque** Il n'y a donc que deux orientations possibles sur l'espace E.

**Exemple** Sur $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, on oriente très souvent l'espace en décrétant que la base canonique est directe.

## III. 2. Produit mixte

**Proposition 11** – *Déterminant dans une base orthonormée directe*

On suppose l'espace E orienté et on se donne $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases orthonormées directes de E.
Alors on a :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{E}^n, \quad \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathscr{B}'}(x_1, \dots, x_n)$$

**Définition 8** – *Produit mixte*

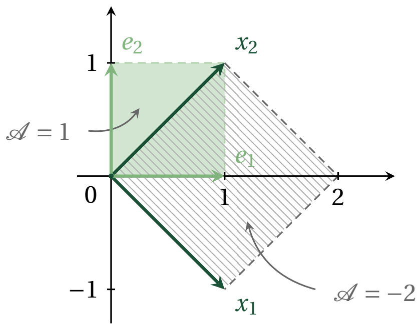
On suppose l'espace E orienté et on se donne $x_1, \dots, x_n$ une famille de $n$ vecteurs de E.
On appelle *produit mixte des n vecteurs* $x_1, \dots, x_n$ leur déterminant dans n'importe quel base orthonormée directe de E. On le note $[x_1, \dots, x_n]$.

**Remarque** La bonne définition du produit mixte découle de la proposition précédente.

**Remarque** – *Interprétation géométrique du produit mixte*

Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, on note $e_1$ et $e_2$ les vecteurs de la base canonique que l'on suppose directe. On a, en calculant le produit mixte dans la base canonique $\mathscr{B}_c = (e_1, e_2)$ qui est orthonormée directe :

$$[e_1, e_2] = \det_{\mathscr{B}_c}(e_1, e_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$




qui représente l'aire algébrique du parallélogramme construit sur les vecteurs $e_1$ et $e_2$ (dans cet ordre). De même, si $x_1 = (1, -1)$ et $x_2 = (1, 1)$ alors on a :

$$[x_2, x_1] = \det_{\mathscr{B}_c}(x_2, x_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

qui représente l'aire algébrique du parallélogramme construit sur les vecteurs $x_2$ et $x_1$ (dans cet ordre).
Dans le plan, le produit mixte correspond donc géométriquement à une aire algébrique d'un parallélogramme.
Le même type d'interprétation peut être faite dans l'espace $\mathbb{R}^3$ pour des volumes algébriques de parallélépipèdes.

## III. 3. Produit vectoriel en dimension 3

Dans cette sous-partie, E est supposé orienté et de dimension $n = 3$.

**Proposition 12** – *Produit vectoriel*

Soient $u$ et $v$ deux vecteurs de E.
Il existe un unique vecteur de E, noté $u \wedge v$ et appelé *produit vectoriel des vecteurs u et v*, tel que :

$$\forall w \in \mathrm{E}, \quad [u, v, w] = (u \wedge v \mid w)$$

**Exercice 5**

Si $u$ et $v$ sont deux vecteurs de E, démontrer que $u \wedge v = -v \wedge u$.

**Proposition 13** – *Propriétés du produit vectoriel*

Soient $u$ et $v$ deux vecteurs de E. Alors :

- On a $u \wedge v = 0$ si et seulement si $u$ et $v$ sont colinéaires.
- Le produit vectoriel $u \wedge v$ est orthogonal aux vecteurs $u$ et $v$.
- Si $(u, v)$ est orthonormée, alors $(u, v, u \wedge v)$ est une base orthonormée directe de E.

**Exemple** Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et orienté pour rendre la base canonique directe, on se donne deux vecteurs $i$ et $j$ unitaires et orthogonaux. Alors $(i, j, i \wedge j)$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ et $(i, j, -i \wedge j) = (i, j, j \wedge i)$ une base orthonormée indirecte de $\mathbb{R}^3$.

**Proposition 14** – *Calcul du produit vectoriel*

Soient $u$ et $v$ deux vecteurs de E, muni d'une base orthonormée directe $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On note $u_1, u_2, u_3$ et $v_1, v_2, v_3$ les coordonnées de $u$ et $v$ dans la base $\mathscr{B}$. Alors :

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} e_3$$

**Remarque** On retrouve les composantes du produit vectoriel dans toute base orthonormée directe utilisées couramment en sciences physiques et industrielles.

## IV. Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Dans cette partie, E est un espace euclidien orienté de dimension 2.

**Proposition 15** – *Description de* $O_2(\mathbb{R})$

Soit M une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Alors :

- M appartient à $SO_2(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- M appartient à $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

**Vocabulaire** Pour $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est appelée *matrice de rotation d'angle* $\theta$.

**Exemple 6**

On pose $X = {}^t(1 \ \ 0) \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Pour des valeurs « remarquables » de l'angle $\theta$, calculer $R_\theta X$ et observer en quoi la dénomination « rotation d'angle $\theta$ » est cohérente.

**Proposition 16** – *Produit de deux rotations*

Pour $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, on a : $R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$.

### Exemples 7

**(1)** Monter que deux matrices de $SO_2(\mathbb{R})$ commutent toujours.

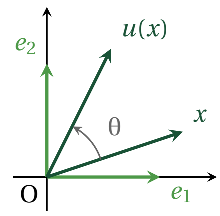
**(2)** Pour $\theta \in \mathbb{R}$, montrer que $R_\theta$ est inversible et donner son inverse.

**Proposition 17** – *Description des isométries directes du plan*

Soient $u$ un endomorphisme de E et $\mathscr{B}$ une base orthonormée directe de E.
Alors $u$ appartient à SO(E) si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que la matrice de $u$ dans la base $\mathscr{B}$ soit :

$$M_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R_\theta$$

Le réel $\theta$, unique à $2\pi$ près, est le même pour toute base orthonormée directe $\mathscr{B}'$.
On dit alors que $u$ est la *rotation d'angle* $\theta$ et que $\theta$ est *l'angle de la rotation* $u$.




**Remarques**

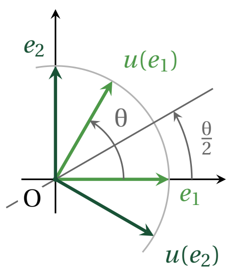
- Les résultats précédents montrent que si deux endomorphismes $u$ et $v$ de SO(E) sont des rotations d'angles respectifs $\theta$ et $\theta'$ alors $u \circ v = v \circ u$ est une rotation d'angle $\theta + \theta'$.
- Dans toutes les bases orthonormées indirectes, on peut montrer que la matrice représentant $u$ devient $R_{-\theta}$.

**Proposition 18** – *Description des isométries indirectes du plan*

Soient $u$ un endomorphisme de E et $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée de E.
Alors $u$ appartient à $O(E)\setminus SO(E)$ si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que la matrice de $u$ dans la base $\mathscr{B}$ soit :

$$M_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

L'endomorphisme $u$ est alors la symétrie (ou réflexion) orthogonale par rapport à la droite $D_\theta$ engendrée par le vecteur $d_\theta = \cos(\theta/2)e_1 + \sin(\theta/2)e_2$ et parallèlement à $D_\theta^\perp$.




**Remarque** Dans ce cas, le réel $\theta$ dépend de la base orthonormée choisie.

**Classification des isométries du plan**

Soit $u$ une isométrie de E. On introduit l'ensemble $E_1 = \{x \in E,\ u(x) = x\}$ des points fixes de $u$ qui n'est autre que l'espace propre $E_1$ de $u$ associé à la valeur propre 1. Dès lors, les différents types d'isométries du plan que l'on peut obtenir sont :

- **Si $\dim(E_1) = 0$**
  $u$ est une rotation dont on peut déterminer l'angle en se rappelant que dans toute base orthonormée directe, la première colonne de la matrice de $u$ donne $\cos\theta$ et $\sin\theta$ (isométrie directe).
- **Si $\dim(E_1) = 1$**
  $u$ est une symétrie orthogonale par rapport à la droite $E_1$ parallèlement à la droite $E_1^\perp$ (isométrie indirecte).
- **Si $\dim(E_1) = 2$**
  $u$ est l'identité (isométrie directe).

### Exemples 8

Vérifier que les matrices suivantes sont orthogonales et déterminer la nature géométrique de l'endomorphisme du plan $\mathbb{R}^2$, muni du produit scalaire canonique, qui leur est canoniquement associé :

**(1)** $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(2)** $B = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

## V. Isométries vectorielles d'un espace euclidien de dimension 3

Dans cette partie, E est un espace euclidien orienté de dimension 3.

**Proposition 19** – *Expression matricielle des isométries en dimension 3*

Soit $u$ une isométrie de E.

- Si $u \in \mathrm{SO}(\mathrm{E})$, il existe une base orthonormée directe dans laquelle la matrice de $u$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \theta \in \mathbb{R}$$

- Si $u \in \mathrm{O}(\mathrm{E}) \setminus \mathrm{SO}(\mathrm{E})$, il existe une base orthonormée directe dans laquelle la matrice de $u$ est :

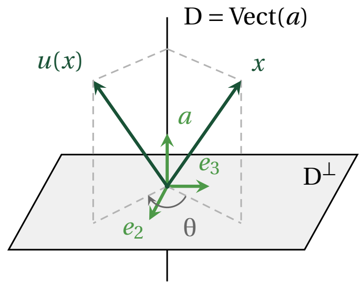
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \theta \in \mathbb{R}$$

**Proposition 20** – *Description des isométries directes en dimension* 3

Soit $u$ un endomorphisme de E.
Alors $u$ appartient à SO(E) si et seulement si il existe une base orthonormée directe $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de $u$ s'écrit :

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

En notant $a$ un vecteur non nul de même sens que le premier vecteur de $\mathscr{B}$, le réel $\theta$, unique à $2\pi$ près, est le même pour toute base orthonormée directe $\mathscr{B}'$ commençant par $a/\|a\|$. On dit alors que $u$ est la *rotation d'angle* $\theta$ *et d'axe dirigé par* $a$.




### Remarques

- La rotation d'angle $\theta$ et d'axe dirigé par $a$ est également la rotation d'angle $-\theta$ et d'axe dirigé par $-a$.
- Le vecteur $a$ qui dirige et oriente l'axe de rotation n'est pas unique puisque tout vecteur $\lambda a$ pour $\lambda > 0$ convient aussi.

### Classification des isométries de l'espace

Soit $u$ une isométrie de E. On introduit l'ensemble $\mathrm{E}_1 = \{x \in \mathrm{E},\ u(x) = x\}$ des points fixes de $u$ qui n'est autre que l'espace propre $\mathrm{E}_1$ de $u$ associé à la valeur propre 1. Dès lors, les différents types d'isométries de l'espace que l'on peut obtenir sont :

- **Si $\dim(\mathrm{E}_1) = 0$**
  Cette situation sort du cadre du programme mais on peut prouver que $u$ est la composée (commutative) d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan et d'une rotation d'axe orthogonal à ce plan (isométrie indirecte).
- **Si $\dim(\mathrm{E}_1) = 1$**
  $u$ est une rotation d'angle $\theta$ et d'axe dirigé par un vecteur engendrant $\mathrm{E}_1$ ; on verra plus loin comment déterminer précisément l'axe et l'angle de la rotation (isométrie directe).
- **Si $\dim(\mathrm{E}_1) = 2$**
  $u$ est une symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathrm{E}_1$ parallèlement à la droite $\mathrm{E}_1^{\perp}$ (isométrie indirecte).
- **Si $\dim(\mathrm{E}_1) = 3$**
  $u$ est l'identité (isométrie directe).

**Méthode** — *Déterminer les éléments caractéristiques d'une rotation*

On suppose donnée la matrice M dans une base orthonormée directe d'une isométrie vectorielle positive, c'est-à-dire telle que $\det(\mathrm{M}) = 1$. D'après l'étude précédente, cette matrice représente forcément une rotation $u$ dont on va chercher à déterminer l'axe et l'angle.

**(1)** On détermine l'axe en cherchant la droite invariante, c'est-à-dire en explicitant l'ensemble $\mathrm{E}_1$ des points fixes de $u$, qui n'est rien d'autre que l'espace propre $\mathrm{E}_1$ de $u$ associé à la valeur propre 1. On en choisit alors un vecteur directeur $a$ ;

**(2)** Par le résultat qui précède, dans toute base orthonormée directe $\mathscr{B}$ commençant par le vecteur $a/\|a\|$, la matrice de $u$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

de sorte que l'on a la relation $\operatorname{Tr}\mathrm{M} = 1 + 2\cos\theta$ ;

**(3)** On détermine alors l'angle de la rotation autour de l'axe dirigé par $a$ en utilisant le résultat qui suit qui affirme que $\sin\theta$ est du signe de $[a, x, u(x)]$ pour tout vecteur $x$ non colinéaire à $a$.

**Proposition 21** — *Un résultat permettant de déterminer le signe de l'angle d'une rotation*

Soit $u$ un endomorphisme de E. On suppose que $u$ est la rotation d'angle $\theta$ et d'axe dirigé par $a$.
Alors $\sin\theta$ est du signe de $[a, x, u(x)]$ pour tout vecteur $x$ non colinéaire à $a$.

**Exemple 9**

Montrer que la matrice suivante est orthogonale et déterminer la nature géométrique de l'endomorphisme de l'espace $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique, qui lui est canoniquement associé :

$$\mathrm{M} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

**Méthode** — *Déterminer la matrice d'une rotation*

À l'inverse, on suppose donnés l'angle $\theta$ et un vecteur directeur $a$ de l'axe d'une rotation $u$ de E et on cherche à retrouver la matrice de la rotation dans la base canonique $\mathscr{B}_c$ de $\mathbb{R}^3$.

**(1)** On crée une base orthonormée directe dont le premier vecteur est colinéaire à $a$. Typiquement, on prend $x$ un vecteur orthogonal à $a$ et, en posant $a^* = a/\|a\|$ et $x^* = x/\|x\|$, on considère la base orthonormée directe $\mathscr{B} = (a^*, x^*, a^* \wedge x^*)$.

**(2)** Dans cette base orthonormée directe, la matrice de $u$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

**(3)** On explicite la matrice de passage P de la base canonique $\mathscr{B}_c$ vers la base $\mathscr{B}$ et on conclut en écrivant que $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_c}(u) = \mathrm{P}\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u)\mathrm{P}^{-1}$.

**Exemple 10**

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation $u$ d'angle $\pi/2$ et d'axe dirigé par le vecteur $a = (1, 1, 2)$.

## VI. Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques

Dans cette partie, E est de nouveau un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

**Définition 9** – *Endomorphisme autoadjoint*

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ une endomorphisme de E.
On dit que $u$ est *autoadjoint* (ou *symétrique*) s'il vérifie :

$$\forall x, y \in \mathrm{E}, \quad (u(x) \mid y) = (x \mid u(y))$$

**Notation** L'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E est noté $\mathrm{S}(\mathrm{E})$.

**Exemples 11**

Montrer que toute homothétie de E est un endomorphisme autoadjoint.

**Proposition 22** – *Caractérisation des projections orthogonales*

Soit $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un projecteur de E.
Alors $p$ est un projecteur orthogonal si et seulement $p$ est autoadjoint.

**Exercice 12**

Soient $u$ un endomorphisme autoadjoint de E et $\lambda$ et $\mu$ deux valeurs propres distinctes de $u$.
Montrer que les sous-espaces propres $\mathrm{E}_\lambda(u)$ et $\mathrm{E}_\mu(u)$ sont orthogonaux.

**Proposition 23** – *Structure de* $\mathrm{S}(\mathrm{E})$

L'ensemble $\mathrm{S}(\mathrm{E})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.

**Proposition 24** – *Matrices des endomorphismes autoadjoints*

Soient $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme de E et $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E.
Alors $u$ est un endomorphisme autoadjoint si et seulement si sa matrice dans la base $\mathscr{B}$ est symétrique.

**Remarque 1** Le fait que la base $\mathscr{B}$ soit orthonormée est important.

**Proposition 25** – *Isomorphisme entre* $\mathrm{S}(\mathrm{E})$ *et* $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$

Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. Alors l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{S}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u) \end{array}$$

est un isomorphisme. En particulier, la dimension de $\mathrm{S}(\mathrm{E})$ est $n(n+1)/2$.

**Théorème 1** – *Théorème spectral*

Soit $u$ un endomorphisme autoadjoint de E.
Alors il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de $u$.

**Remarques**

- Autrement dit, tout endomorphisme autoadjoint est diagonalisable dans une base orthonormée.
- Le résultat équivaut au fait que E est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de $u$.

**Théorème 2** – *Interprétation matricielle du théorème spectral*

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.
Alors il existe une matrice diagonale réelle D et une matrice orthogonale $P \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $P^{-1}AP = D$.

**Remarques**

- En d'autres termes, toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée.
- On rappelle que, puisque $P \in O_n(\mathbb{R})$, on a $P^{-1} = {}^tP$.
- Le fait que la matrice A soit réelle est important comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 13**

Étudier la diagonalisabilité de $M = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$.

**Méthode** – *Diagonalisation d'une matrice symétrique réelle*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. On souhaite diagonaliser A dans une base orthonormée.

**(1)** On commence par indiquer que A est symétrique réelle de sorte que A est diagonalisable dans une base orthonormée par le théorème spectral.

**(2)** On détermine les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de A en calculant son polynôme caractéristique et en déterminant ses racines. On détermine ensuite des bases des sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ de A en résolvant, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, les systèmes $AX = \lambda X$ pour $\lambda$ dans $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.

**(3)** On utilise alors l'algorithme de Gram-Schmidt afin de rendre les bases des sous-espaces propres orthonormées, si elles ne le sont pas déjà.

**(4)** Enfin, on conclut :

- On donne la matrice de passage P de la base orthonormée de départ vers une base orthonormée formée de vecteurs propres de A que l'on constitue en concaténant les bases orthonormées des sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ trouvées à l'étape **(3)**. À noter que les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont automatiquement orthogonaux en vertu de l'**Exercice 12**.

  **Remarque** La matrice P est bien orthogonale puisque c'est une matrice de passage d'une base orthonormée vers une autre.

- On donne la matrice D diagonale vérifiant $P^{-1}AP = D$. Les éléments diagonaux de D sont les valeurs propres de A énumérées avec leurs ordres de multiplicité.

  **Remarque** Les valeurs propres de A sur la diagonale de D apparaissent dans le même ordre que celui utilisé pour concaténer les bases des sous-espaces propres de A.

**Exemple 14**

Étudier si la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans une base orthonormée.

**Définition 10** – *Endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs*

Soit $u$ un endomorphisme autoadjoint de E.

- On dit que $u$ est *positif* si : $\forall x \in \mathrm{E}, \quad (x \mid u(x)) \geqslant 0$.
- On dit que $u$ est *défini positif* si : $\forall x \in \mathrm{E} \setminus \{0\}, \quad (x \mid u(x)) > 0$.

**Notation** L'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs de E seront notés respectivement $\mathrm{S}^+(\mathrm{E})$ et $\mathrm{S}^{++}(\mathrm{E})$.

**Définition 11** – *Matrices symétriques positives et définies positives*

Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

- On dit que M est *positive* si : $\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^t\mathrm{XMX} \geqslant 0$.
- On dit que M est *définie positive* si : $\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad {}^t\mathrm{XMX} > 0$

**Notation** L'ensemble des matrices symétriques positives et définies positives seront notés respectivement $\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

**Remarque** – *Lien entre les deux définitions*

Soient $\mathrm{M} \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ la matrice d'un endomorphisme autoadjoint $u$ dans une base orthonormée $\mathscr{B}$, $x$ un vecteur de E et $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne le représentant dans la base $\mathscr{B}$. Alors on a ${}^t\mathrm{XMX} = (u \mid u(x))$.
La définition précédente n'est donc que l'adaptation matricielle naturelle de la définition la précédant.

**Proposition 26** – *Caractérisation spectrale des matrices symétriques positives et définies positives*

Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors :

- M est positive si et seulement si $\mathrm{sp}(\mathrm{M}) \subset \mathbb{R}_+$.
- M est définie positive si et seulement $\mathrm{sp}(\mathrm{M}) \subset \mathbb{R}_+^*$.

**Remarque** Un résultat similaire peut être énoncé pour caractériser les endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs.