

Exercice 1. Centrale 2 2025

Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$ sont deux polynômes complexes, on appelle résultant de P et Q , noté $\text{Res}(P, Q)$, le

déterminant de la matrice $S(P, Q) = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & & \vdots & b_1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & a_0 & \vdots & & & \ddots & b_0 \\ a_n & & & & a_1 & b_m & & & & b_1 \\ 0 & \ddots & & & \vdots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{C})$

1. Coder $\text{Res}(P, Q)$ pour P et Q de degré 2.
2. Calculer $\text{Res}(P, Q)$ pour
 - (a) $P = (X - 1)(X - 2)$ et $Q = (X - 1)(X - 3)$,
 - (b) $P = (X - 1)(X - 2)$ et $Q = (X - 3)(X - 4)$,
 - (c) $P = X^2 - 2X + 1$ et $Q = X^2 - 2$.
3. Que peut-on conjecturer?
Soit $\varphi : (U, V) \in \mathbb{C}_{m-1}[X] \times \mathbb{C}_{n-1}[X] \mapsto PU + QV$.
4. Montrer que φ est linéaire et à valeurs dans $\mathbb{C}_{n+m-1}[X]$.
5. Montrer que φ est injective si et seulement si P et Q n'ont pas de racine complexe commune.
6. On pose $\mathcal{B} = ((1, 0), \dots, (X^{m-1}, 0), (0, 1), \dots, (0, X^{n-1}))$ et $\mathcal{B}' = (1, \dots, X^{n+m-1})$. Montrer que $S(P, Q)$ est la matrice de φ dans la base \mathcal{B} au départ et la base \mathcal{B}' à l'arrivée. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré n , on pose $\text{Dis}(P) = \text{Res}(P, P')$.
7. Montrer que P est à racines simples si et seulement si $\text{Dis}(P) \neq 0$.
8. Soit $P = aX^2 + bX + c$ de degré 2. Montrer que P admet deux racines complexes distinctes si et seulement si $b^2 - 4ac \neq 0$.

Exercice 2. Centrale 2 2025

On pourra utiliser `import numpy as np, import numpy.linalg as alg`.

On étudie la matrice $A_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket, [A_n]_{i+1, j+1} = \frac{1}{n-i+j+1} \binom{n}{i}$.

1. Ecrire une fonction `mat(n)` qui renvoie A_n . On pourra utiliser `sc.comb(n, i)` pour le coefficient binomial après avoir validé `import scipy.special as sc`.
Etudier la diagonalisabilité de A_n pour $n \in \llbracket 2, 6 \rrbracket$.
2. (a) Pour tous vecteurs $x, y \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, on pose $\langle x, y \rangle_n = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{x_i y_j}{i+j+1}$, ce qui définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$. Ecrire une fonction `prod_scal(x, y, n)` qui renvoie $\langle x, y \rangle_n$.
(b) Pour $n \in \llbracket 2, 8 \rrbracket$, étudier l'orthogonalité des sous-espaces propres des A_n .

On définit maintenant une application u sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \forall x \in \mathbb{R}, u(P)(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t) dt$.

3. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et que A_n est sa matrice dans la base canonique.
4. Montrer que u est autoadjoint pour le produit scalaire défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt.$$

En déduire que A_n est diagonalisable et que ses sous-espaces propres sont orthogonaux.

Exercice 3. Centrale 2 2025

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. On considère les suites $(y_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{n^\beta}$ et $\forall n \geq 2$, $y_n = \frac{1}{n \ln^2(n)}$.

On dit qu'une suite (u_n) à termes strictement positifs vérifie (F_λ) , où $\lambda \in \mathbb{R}$, lorsque $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

1. À l'aide de Python, déterminer le réel λ tel que (v_n) vérifie (F_λ) . Étudier la convergence de $\sum v_n$. Démontrer ces résultats.
2. Mêmes questions avec (y_n) .
Dans ce qui suit, on considère (u_n) vérifiant (F_λ) .
3. On suppose $\lambda < 0$. Montrer que $\sum u_n$ diverge.
4. On suppose $\lambda > \beta > 1$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.
En déduire la nature de $\sum u_n$.
5. On suppose $0 \leq \lambda < 1$. Montrer que $\sum u_n$ diverge. Que dire dans le cas $\lambda = 1$?
6. Pour $n \geq 1$, on pose $w_n = \sqrt{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Déterminer la nature de $\sum w_n$.

Exercice 5. Centrale 2 2025

- Conjecturer, à l'aide de python, la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$. En préciser une valeur approchée.
 - De même, conjecturer la nature de l'intégrale $I_m = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2m+1}(t)}{t} dt$ pour un entier $m \in \mathbb{N}$. Que peut-on observer lorsque $m \rightarrow +\infty$.
- Montrer que l'intégrale de la question 1a) converge.
 - Par une intégration par parties, montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = I_0$.
- Justifier que l'intégrale définissant I_m converge pour tout $m \in \mathbb{N}$.
 - Montrer que la suite $(I_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive. En déduire qu'elle converge.
 - Etudier la limite de $(I_m)_{m \in \mathbb{N}}$.

Exercice 6. Centrale 2 2025

Soit P_1, P_2, \dots, P_n , n personnes. Pour tout $(i, j) \in (\llbracket 1; n \rrbracket)^2$ tel que $i \neq j$, la probabilité qu'une personne P_i soit en relation avec une personne P_j est de $p \in [0; 1]$.

On dira qu'une personne est isolée si elle n'est en relation avec personne.

Soit, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la variable aléatoire X_i qui vaut 1 si l'individu P_i est isolé et 0 sinon.

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n qui représente, parmi n personnes, le nombre d'individus isolés.

- Ecrire une fonction `M` en PYTHON, de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0; 1]$ qui renvoie une réalisation d'une matrice carrée de taille n représentant les relations entre individus (*i.e.* le coefficient de la i -ième ligne et j -ième colonne de cette matrice sera égal à 1 si les individus P_i et P_j sont en relation et égal à 0 sinon).
 - Ecrire une fonction `NbIsoles` de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0; 1]$ qui renvoie le nombre de personnes isolées parmi n individus pour une réalisation aléatoire de la situation de l'énoncé.
 - Ecrire une fonction `Appro` de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0; 1]$ qui renvoie une approximation de $E(S_n)$; (on fera 1000 itérations).
 - Tracer le graphe de la suite $\left(\ln \left(\frac{E(S_n)}{n} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour $n \in \llbracket 2; 10 \rrbracket$, pour $p \in \{0, 3; 0, 5; 0, 7\}$. Que peut-on remarquer, conjecturer?
- Calculer $E(X_1)$.
 - En déduire $E(S_n)$ en fonction de n et p .
- Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} admettant un moment d'ordre 2.
Montrer que $\mathbf{P}(Y \geq 1) \leq E(Y)$ et $\mathbf{P}(Y = 0) \leq \frac{V(Y)}{(E(Y))^2}$.
- Montrer que $\mathbf{P}(S_n = 0) \geq \max(1 - E(S_n); 0)$, et que $\mathbf{P}(S_n = 0) \leq \min \left(\frac{E(S_n^2)}{(E(S_n))^2} - 1; 1 \right)$.
- Calculer $E(S_n^2)$, en déduire un encadrement de $\mathbf{P}(S_n = 0)$ en fonction de n et p .

Exercice 7. Centrale 2 2025

On considère la situation suivante. Un amateur de chewing-gum possède deux paquets de chewing-gum, chacun en contenant N . Il choisit aléatoirement un paquet à chaque tirage. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de chewing-gums dans l'autre paquet lorsqu'il se rend compte qu'un paquet est vide.

1. À l'aide de Python, conjecturer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la valeur de $\sum_{j=p}^{2p} \binom{j}{p} \frac{1}{2^j}$.
2. (a) Ecrire une fonction Python simulant la situation décrite. Elle prendra en argument N , le nombre de chewing-gums dans un paquet, et renverra le nombre de chewing-gums restants dans le paquet a priori non vide.
(b) En déduire une fonction calculant une valeur approchée de $E(X)$, prenant N en argument.
(c) Tracer $E(X)$ en fonction de N , pour N entre 1 et 100.

Au k -ième tirage, on note Z_k , la variable aléatoire qui vaut 0 si l'amateur prend le paquet de la poche de gauche et 1 s'il prend celui de la poche de droite. On pose $S_n = Z_1 + \dots + Z_n$. On note T la variable aléatoire qui prend la valeur du dernier tirage (lorsque l'amateur se rend compte qu'un paquet est vide).

3. Donner la loi de S_n .
4. Donner $T(\Omega)$. Ecrire l'événement $(T = t)$ en fonction d'événements de la forme $(S_n = i)$ et $(Z_k = z)$.
5. En déduire la loi de T . Faire le lien avec la conjecture de la première question.
6. Déterminer l'espérance de T .
7. Déterminer la loi et l'espérance de X . Vérifier le résultat de la deuxième question.