

POUR LE LUNDI 26 SEPTEMBRE



Les questions abordables uniquement par les 5/2 sont indiquées par le symbole (★).

PROBLÈME

Dans la suite, E désignera l'espace vectoriel des suites réelles. Toute suite $u \in E$ pourra être notée sous la forme $u = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots)$ ou sous la forme $u = (u_n)$ ou encore $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Une suite u de E sera dite périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$ lorsqu'elle vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = u_n$$

Enfin, on dira qu'une suite u de E est périodique s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel qu'elle soit périodique de période p .

PARTIE A

On introduit l'ensemble $\mathcal{S}_0 = \{u \in E, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_n = 0\}$.

1. Soient les deux suites λ et μ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \mu_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

- 1.1. Vérifier que λ et μ sont des éléments de \mathcal{S}_0 .
- 1.2. Montrer que ces deux suites sont périodiques.
2. Montrer que \mathcal{S}_0 est un sous-espace vectoriel de E .
3. Donner une base de \mathcal{S}_0 et préciser sa dimension.
4. Soit $u \in \mathcal{S}_0$ non nulle.
 - 4.1. La suite u est-elle convergente?
 - 4.2. La série $\sum u_n$ de terme général u_n est-elle convergente?

PARTIE B

On considère maintenant l'ensemble $\mathcal{S} = \{u \in E, \exists a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_n = 2a\}$, c'est à dire l'ensemble des suites réelles u pour lesquelles il existe une constante réelle a telle que pour tout entier naturel n , on ait $u_{n+2} + u_n = 2a$.

5. On commence par étudier quelques exemples.
 - 5.1. On prend $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que $u \notin \mathcal{S}$.
 - 5.2. On prend $u_n = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière. Vérifier que $u \in \mathcal{S}$ et préciser la valeur du réel a correspondant.
 - 5.3. On prend $u_n = 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que $u \in \mathcal{S}$ et préciser la valeur du réel a correspondant.
6. Vérifier que les suites constantes appartiennent à \mathcal{S} .
7. Déterminer les suites géométriques appartenant à \mathcal{S} .
8. Montrer que \mathcal{S} est un sous-espace vectoriel de E .
9. A-t-on l'inclusion $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_0$? Et l'inclusion $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$?
10. On introduit l'application φ suivante :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{S} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \frac{u_0 + u_2}{2} \end{aligned}$$

Montrer que φ est une forme linéaire sur \mathcal{S} et déterminer son noyau.

11. Soit $v \in E$ définie par $v_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \oplus \text{Vect}(v)$.
12. Soit $u \in \mathcal{S}$. Déterminer alors, pour tout entier naturel n , une expression de u_n en fonction de n .
13. Montrer que tout élément $u \in \mathcal{S}$ est une suite périodique de période 4.
14. Prouver que l'application $\theta : u \in \mathcal{S} \mapsto \theta(u) = (u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^3$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

On note $\mathcal{C} = (I, J, K)$ la base de \mathcal{S} obtenue comme image réciproque de la base canonique de \mathbb{R}^3 par θ :

$$\theta(I) = (1, 0, 0), \quad \theta(J) = (0, 1, 0), \quad \theta(K) = (0, 0, 1)$$

15. Expliciter les cinq premiers termes de chacune des suites I, J et K.
16. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $T_k : u \in E \mapsto T_k(u) = w$ définie par $w_n = u_{kn}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - 16.1. Vérifier que T_k est un endomorphisme de E .
 - 16.2. Le sous-espace \mathcal{S} est-il stable par T_2 ?
 - 16.3. Le sous-espace \mathcal{S} est-il stable par T_3 ?
 - 16.4. Écrire la matrice, dans la base \mathcal{C} obtenue à la question 14, de l'endomorphisme τ_3 induit par T_3 sur \mathcal{S} .
 - 16.5. (★) L'endomorphisme τ_3 de \mathcal{S} est-il diagonalisable?
 - 16.6. Reconnaître la nature géométrique de τ_3 .

PARTIE C

Soient $p \geq 2$ fixé et l'espace vectoriel $\mathcal{S}_p = \{u \in E, \exists a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} + u_n = 2a\}$.

17. Montrer que tout élément de \mathcal{S}_p est périodique de période $2p$.
18. On introduit la matrice suivante :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})$$

- 18.1. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer le déterminant $\det(xI_{p+1} - F)$.
- 18.2. (★) Déterminer les valeurs propres de F .
- 18.3. F est-elle inversible?
- 18.4. (★) F est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{C})$? Dans $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})$?
19. Prouver que l'application δ suivante :

$$\delta : \mathcal{S}_p \longrightarrow \mathbb{R}^{p+1} \quad \text{où} \quad a = \frac{u_0 + u_p}{2}$$

$$u \longmapsto (u_0, u_1, \dots, u_{p-1}, a)$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
Quelle est la dimension de \mathcal{S}_p ?

On note \mathcal{C}_p l'image réciproque de la base canonique de \mathbb{R}^{p+1} par δ .

20. Soit ψ l'application définie par :

$$\psi : \mathcal{S}_p \longrightarrow \mathcal{S}_p$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$$

- 20.1. Vérifier que ψ est un endomorphisme de \mathcal{S}_p .
- 20.2. Sans nouveau calcul, préciser $\psi^{2p} = \psi \circ \dots \circ \psi$, composée $2p$ fois de l'application ψ .
- 20.3. Écrire la matrice de ψ dans la base \mathcal{C}_p de \mathcal{S}_p .
- 20.4. (★) Étudier si ψ est diagonalisable.
- 20.5. (★) Prouver que ψ est bijective et déterminer son inverse ψ^{-1} .