DEVOIR À LA MAISON N°1

Corrigé

Problème

Partie A

1. **1.1.** On sait que $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ et $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ donc, si $n \in \mathbb{N}$, on a immédiatement :

$$\lambda_{n+2} = \cos\left((n+2)\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}+\pi\right) = -\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = -\lambda_n$$

ainsi que :

$$\mu_{n+2} = \sin\left((n+2)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(n\frac{\pi}{2}+\pi\right) = -\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = -\mu_n$$

Ainsi, $\lambda, \mu \in \mathscr{S}_0$.

1.2. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lambda_{n+4} = -\lambda_{n+2} = -(-\lambda_n) = \lambda_n$ et de même $\mu_{n+4} = \mu_n$. Ainsi λ et μ sont périodiques de période 4.

2. L'ensemble $\mathscr{S}_0$ est non vide puisqu'il contient la suite nulle. De plus, il est stable par combinaisons linéaires. En effet, si u et v sont dans $\mathscr{S}_0$ et si $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\alpha u_{n+2} + v_{n+2}) + (\alpha u_n + v_n) = \alpha(\underbrace{u_{n+2} + u_n}_{=0}) + \underbrace{v_{n+2} + v_n}_{=0} = 0$$

de sorte que $\alpha u + v$ est bien dans $\mathscr{S}_0$. Cela prouve que $\mathscr{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de E par caractérisation des sous-espaces vectoriels.

3. Les éléments de $\mathscr{S}_0$ sont les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique $r^2+1=0$. Les solutions de cette dernière étant $e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$, le cours indique que (λ, μ) est une base de $\mathscr{S}_0$ et que cet espace est de dimension 2.

4. **4.1.** La suite u est combinaison linéaire de λ et μ. En regardant les termes d'indice 0 et 1, on trouve les coefficients de la combinaison et on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + u_1 \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

Puisque u est non nulle par hypothèse, u_0 ou u_1 est non nul. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient avec l'expression ci-dessus que $u_{4n} = u_0$, $u_{4n+1} = u_1$, $u_{4n+2} = -u_0$ et $u_{4n+3} = -u_1$. Parmi ces quatre suites extraites figurent donc nécessairement deux suites extraites qui convergent vers des limites différentes (puisque u_0 ou u_1 est non nul). Ainsi la suite u ne converge pas.

4.2. La série $\sum u_n$ est donc grossièrement divergente puisque son terme général n'est pas de limite nulle.

Partie B

5. **5.1.** Supposons, par l'absurde, que $u \in \mathscr{S}$ et notons a le réel associé. On a $2a = u_2 + u_0 = 2$ et $2a = u_1 + u_3 = -2$ ce qui amène une contradiction. Ainsi $u \notin \mathscr{S}$.

5.2. Dans ce cas, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{4n} = u_{4n+1} = 1$ et $u_{4n+2} = u_{4n+3} = -1$ pour tout n. On en déduit que l'on a $u_{n+2} + u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, par exemple en distinguant les cas où $n = 4p$, $n = 4p+1$, $n = 4p+2$ et $n = 4p+3$. On a donc $u \in \mathscr{S}$ et la constante correspondante est nulle.

5.3. Dans ce cas, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_{n+2} = 5$. On a donc $u \in \mathscr{S}$ et la constante correspondante est 5.

6. Soit $u \in \mathscr{S}$ une suite constante égale à son premier terme u_0. On a donc $u_{n+2} = u_n = u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que u est dans $\mathscr{S}$ avec une constante égale à u_0.

7. Soit u une suite géométrique. Il existe des réels q et λ tels que $u_n = \lambda q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Si $u \in \mathscr{S}$ alors $u_0 + u_2 = u_1 + u_3$ et donc $\lambda(1+q^2) = \lambda q(1+q^2)$. On en déduit que $\lambda = 0$ ou $q = 1$. Dans les deux cas, u est constante.
- Réciproquement, les suites constantes sont dans $\mathscr{S}$ d'après la question précédente.

En conclusion, les suites géométriques qui sont dans $\mathscr{S}$ sont exactement les suites constantes.

8. On sait déjà que $\mathscr{S}$ est non vide puisqu'il content la suite nulle. Si u et v sont dans $\mathscr{S}$ associées à des constantes a et b et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u+\lambda v)_{n+2} + (u+\lambda v)_n = u_{n+2} + u_n + \lambda(v_{n+2} + v_n) = a + \lambda b$$

Ainsi $u + \lambda v \in \mathscr{S}$ et la constante associée est $a + \lambda b$. On en déduit que $\mathscr{S}$ est stable par combinaisons linéaires. En conclusion, $\mathscr{S}$ est bien un sous-espace vectoriel de E.

9. De façon immédiate, on a $\mathscr{S}_0 \subset \mathscr{S}$ puisque tout élément de $\mathscr{S}_0$ est dans $\mathscr{S}$ avec une constante associée nulle.

L'inclusion réciproque est fausse puisque la suite constante égale à 1 est dans $\mathscr{S}$ sans être dans $\mathscr{S}_0$.

10. Si u et v sont dans $\mathscr{S}$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a immédiatement $\varphi(\lambda u + v) = \lambda\varphi(u) + \varphi(v)$, c'est à dire la linéarité de φ. Comme φ est à valeur dans $\mathbb{R}$, c'est une forme linéaire.

- Soit $u \in \operatorname{Ker}\varphi$. Puisque $u \in \mathscr{S}$, il existe une constante $a \in \mathbb{R}$ telle que $u_{n+2} + u_n = 2a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, on a $u_2 + u_0 = 2a$. Puisque $u \in \operatorname{Ker}\varphi$, il vient $a = (u_2 + u_0)/2 = \varphi(u) = 0$. Ainsi on a $u \in \mathscr{S}_0$.
- Réciproquement, soit $u \in \mathscr{S}_0$. On a en particulier $u_2 + u_0 = 0$, ce qui donne $\varphi(u) = 0$ soit $u \in \operatorname{Ker}\varphi$.

En conclusion, on a $\operatorname{Ker}\varphi = \mathscr{S}_0$.

11. La suite v est dans $\mathscr{S}$ mais pas dans l'hyperplan $\operatorname{Ker}(\varphi) = \mathscr{S}_0$. Par un résultat classique, on sait que l'on a alors la décomposition en somme directe suivante $\mathscr{S} = \mathscr{S}_0 \oplus \operatorname{Vect}(v)$.

12. Soit $u \in \mathscr{S}$ de constante associée a. On sait que $a = (u_0 + u_2)/2$. La suite $u - av$ est alors un élément de $\mathscr{S}_0$. En effet, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u_{n+2} - av_{n-2}) + (u_n - av_n) = (u_{n+2} + u_n) - a(v_{n+2} + v_n) = 2a - 2a = 0$$

Avec la question **3**, $u - av$ est donc combinaison linéaire de λ et de μ définies en partie **A**. Les termes d'indice 0 et 1 donnent les valeurs des constantes et on obtient finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{u_0 + u_2}{2} + \frac{u_0 - u_2}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2u_1 - u_0 - u_2}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

13. Un élément de $\mathscr{S}$ est combinaison linéaire des trois suites v, λ et μ qui sont périodique de période 4 d'après la question **1.2**. Tout élément de $\mathscr{S}$ est donc aussi périodique de période 4.

14. L'espace vectoriel $\mathscr{S}$ est de dimension 3 puisque d'après **11** c'est la somme directe d'un espace de dimension 2 et d'un autre de dimension 1. On peut facilement prouver que θ est linéaire. De plus, si $u \in \operatorname{Ker}(\theta)$ alors les trois premiers termes de u sont nuls. On a aussi $u_1 + u_3 = u_0 + u_2$ et donc $u_3 = 0$. Par 4-périodicité, les u_n, $n \in \mathbb{N}$, sont tous nuls. θ est donc une application linéaire injective entre deux espaces de même dimension, c'est un isomorphisme.

15. Si $u \in \mathscr{S}$, on a $u_1 + u_3 = u_0 + u_2$ et donc $u_3 = u_0 + u_2 - u_1$. On peut alors continuer par 4-périodicité. On trouve :

$$\mathrm{I} = (1,0,0,1,1,0,0,1,\dots), \qquad \mathrm{J} = (0,1,0,-1,0,1,0,-1\dots) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{K} = (0,0,1,1,0,0,1,1\dots)$$

16. 16.1. La linéarité de T_k est immédiate puisque pour tout u, $v \in \mathrm{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u + \lambda v)_{kn} = u_{kn} + \lambda v_{kn}$$

Étant donné que T_k est une application de E dans E, c'est un endomorphisme de E.

16.2. On pose $w = \mathrm{T}_2(\mathrm{I}) = (1,0,1,0,\dots)$. On a $\mathrm{I} \in \mathscr{S}$ mais la suite $w = \mathrm{T}_2(\mathrm{I})$ n'est pas dans $\mathscr{S}$ puisque l'on a $w_0 + w_2 = 2 \neq 0 = w_1 + w_3$. Ainsi $\mathscr{S}$ n'est pas stable par T_2.

16.3. On a immédiatement $\mathrm{T}_3(\mathrm{I}) = (1,1,0,0,1,1,0,0,\dots) = \mathrm{I} + \mathrm{J}$, $\mathrm{T}_3(\mathrm{J}) = (0,-1,0,1,0,-1,0,1,\dots) = -\mathrm{J}$ ainsi que $\mathrm{T}_3(\mathrm{K}) = (0,1,1,0,0,1,1,0,\dots) = \mathrm{J} + \mathrm{K}$. Les éléments d'une base de $\mathscr{S}$ étant envoyés dans $\mathscr{S}$ par l'application linéaire T_3, ce qui permet d'affirmer que $\mathscr{S}$ est stable par T_3.

16.4. Les calculs de $T_3(I)$, $T_3(J)$ et $T_3(K)$ de la question précédente donnent :

$$M_{\mathscr{C}}(T_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

16.5. On a $I-K$ et $I+J+K$ vecteurs propres non colinéaires de T_3 associés à la valeur propre 1 et J vecteur propre de T_3 associé à la valeur propre -1. Les sous-espaces propres étant en somme directe, on doit avoir les égalités :

$$\mathrm{Sp}(T_3) = \{1, -1\}, \quad E_1(T_3) = \mathrm{Vect}(I-K, I+J+K) \quad \text{et} \quad E_{-1}(T_3) = \mathrm{Vect}(J)$$

De plus, T_3 est diagonalisable.

16.6. On a $T_3^2 = \mathrm{id}_E$ puisque la matrice M de la question **16.4** vérifie $M^2 = I_3$. Ainsi T_3 est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(T_3 - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}(I-K, I+J+K)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(T_3 + \mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}(J)$.

Partie C

17. Soit $u \in \mathscr{S}_p$ et a la constante associée . On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} + u_n = a = u_{n+2p} + u_{n+p}$$

de sorte que $u_{n+2p} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela montre que u est $2p$−périodique.

18. 18.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Un développement par rapport à la dernière ligne donne :

$$\det(xI_{p+1} - F) = (x-1) \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$$

où le déterminant est de taille p. On développe ce dernier par rapport à la première colonne pour obtenir :

$$\det(xI_{p+1} - F) = (x-1)\left(x \times x^{p-1} + (-1)^{p+1} \times (-1)^{p-1}\right) = (x-1)(x^p + 1)$$

18.2. Les valeurs propres de F sont les racines de son polynôme caractéristique. Avec l'expression de ce dernier trouvée à la question précédente, on a :

- Les valeurs propres complexes sont 1 et les racines p-ièmes de -1 et on a donc :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(F) = \{1\} \cup \left\{ e^{i\frac{(2k+1)\pi}{p}}, \ 0 \leqslant k \leqslant p-1 \right\}$$

- On en déduit que si p est pair, on a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(F) = \{1\}$ et que si p est impair, on a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(F) = \{1, -1\}$.

18.3. Avec le calcul de **18.1**, on a pour $x = 0$ la relation $\det(-F) = -1$ soit $(-1)^{p+1}\det(F) = -1$, ce qui donne $\det(F) = (-1)^p \neq 0$. Ainsi F est inversible.

18.4. D'après la question **18.2**, F possède $p+1$ valeurs propres complexes distinctes et est de taille $p+1$. Elle est donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$ avec des sous-espaces propres de dimension 1.

Il y a au plus deux sous-espaces propres réels qui sont au plus de dimension 1 car la multiplicité de chaque valeur propre est égale à 1. Ainsi, la somme des dimension des sous-espaces propres réels de F est au plus égale à 2 et donc différente de $p+1$ et F n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

19. L'application δ est clairement linéaire.

- Si $u \in \mathrm{Ker}(\delta)$ alors $u_0 = \cdots = u_{p-1} = u_0 + u_p = 0$. La constante a associée à u vaut $(u_0 + u_p)/2 = 0$ et on a donc $u_{n+p} = -u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $u_p = \cdots = u_{2p-1} = 0$. Dès lors, u est $2p$−périodique et ses $2p$ premiers termes sont nuls, la suite u est donc nulle. Le noyau de δ est ainsi réduit à la suite nulle et δ injective.
- Soit $(a_0, \dots, a_{p-1}, x) \in \mathbb{R}^{p+1}$. On définit une suite $u \in E$ de manière récurrente par :

$$\forall i \in [\![0, p-1]\!], \quad u_i = a_i \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant p, \quad u_n = 2x - u_{n-p}$$

On peut alors vérifier que la suite u est dans $\mathscr{S}_p$ associée à la constante x et que $\delta(u) = (a_0, \dots, a_{p-1}, x)$. On a donc montré la surjectivité de δ.

Finalement, δ est un isomorphisme et $\dim(\mathscr{S}_p) = \dim(\mathbb{R}^{p+1}) = p+1$.

20. 20.1. L'application ψ est clairement linéaire. Si $u \in \mathscr{S}_p$ avec une constante associée a et $t = \psi(u)$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n + t_{n+p} = u_{n+1} + u_{n+p+1} = 2a$$

On a donc $t \in \mathscr{S}_p$ avec la même constante a. On a bien prouvé que ψ est un endomorphisme de $\mathscr{S}_p$.

20.2. Les éléments de $\mathscr{S}_p$ étant $2p-$périodiques, on a $\psi^{2p} = \mathrm{id}_{\mathscr{S}_p}$.

20.3. Soit $x = (x_0, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$. En ne précisant uniquement que les termes qui ont de l'importance, on a :

$$\delta^{-1}(x) = (x_0, \dots, x_{p-1}, 2x_p - x_0, 2x_p - x_1, \dots)$$

Cela donne :

$$\psi(\delta^{-1}(x)) = (x_1, \dots, x_{p-1}, 2x_p - x_0, 2x_p - x_1, \dots)$$

Puis :

$$\delta(\psi(\delta^{-1}(x))) = (x_1, \dots, x_{p-1}, 2x_p - x_0, x_p)$$

En notant $(e_0, \dots, e_p)$ les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^{p+1}$ et $\mathrm{E}_i = \delta^{-1}(\mathrm{E}_i)$, on a donc :

$$\psi(\delta^{-1}(x)) = x_1\mathrm{E}_0 + \cdots + x_{p-1}\mathrm{E}_{p-2} + (2x_p - x_0)\mathrm{E}_{p-1} + x_p\mathrm{E}_p$$

La première colonne de la matrice cherchée est constituée des coefficients obtenus quand $x = e_0$ c'est à dire $x_0 = 1$ et $x_1 = \cdots = x_p = 0$. Plus généralement la colonne i de la matrice cherchée est constituée des coefficients obtenus quand $x = e_i$. Avec les formules obtenues, on obtient que la matrice cherchée est F.

20.4. Avec la question **18.4**, F n'étant pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$, ψ n'est pas diagonalisable.

20.5. F étant inversible, ψ est un isomorphisme. Par le théorème de Cayley-Hamilton, χ_F annule ψ ce qui donne $\psi^{p+1} - \psi^p + \psi - \mathrm{id} = 0$ grâce au calcul de χ_F effectué en **18.1**. Ainsi, en composant par ψ^{-1}, il vient la relation $\psi^{-1} = \psi^p - \psi^{p-1} + \mathrm{I}d$. On a donc $\psi^{-1}(u) = w$ avec $w_n = u_{n+p} - u_{n+p-1} + w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.