DEVOIR À LA MAISON N°2

Pour le lundi 17 octobre

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que la matrice A est diagonalisable et donner $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que $P^{-1}AP = D$.
2. Au choix :
   - **2.1.** (version simple) Déterminer une matrice $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
   - **2.2.** (version difficile) Déterminer toutes les $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$.
3. Donner un polynôme annulateur de degré 2 de A.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer A^n en fonction de A et I_3.

Exercice 2

On fixe un entier $n \geqslant 3$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit le polynôme $\varphi(P)$ suivant :

$$\varphi(P) = (X+2)P - XP(X+1)$$

1. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, donner le degré et le coefficient dominant de $\varphi(X^k)$.
2. Justifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. On note A la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Justifier que A est triangulaire et donner ses coefficients diagonaux.
4. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Exercice 3

1. Déterminer les matrices A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^3 = A^2$ et $\mathrm{Tr}(A) = n$.
2. Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 = 7A^3 - 12A^2$. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) \in \mathbb{N}$ et que $0 \leqslant \mathrm{Tr}(A) \leqslant 4n$.

Exercice 4*

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On note u_A l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $u_A(M) = AM$ pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que u_A est diagonalisable si et seulement A est diagonalisable.
2. En étudiant la matrice de u_A dans la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, donner $\mathrm{rg}(u_A)$, $\mathrm{Tr}(u_A)$ et $\det(u_A)$.

Exercice 5*

On fixe $n \geqslant 1$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

1. Grâce au théorème de Cayley-Hamilton, justifier que $\det(A) = 0$.
2. En déduire que A est semblable à une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont la première colonne est nulle.
3. Conclure que A est nilpotente.
   On pourra procéder par récurrence sur n.