DEVOIR À LA MAISON N°2

CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Grâce aux opérations $C_1 \longleftarrow C_1+C_2+C_3$ puis $L_2 \longleftarrow L_2-L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3-L_1$, le polynôme caractéristique de A est donné par $\chi_A(\lambda) = (\lambda-4)(\lambda-1)^2$. On en déduit $\mathrm{sp}(A) = \{1,4\}$. La résolution des systèmes $AX = X$ et $AX = 4X$ permet de conclure que :

$$E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et} \qquad E_4(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

En particulier, on a $\dim(E_1(A)) + \dim(E_4(A)) = 3$ et A est diagonalisable. On peut la diagonaliser en concaténant les bases des sous-espaces propres, on aura alors $P^{-1}AP = D$ avec :

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

2. 2.1. Voir question suivante.

2.2. ▪ **(Analyse)** On suppose que $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $B^2 = A$. On pose $C = P^{-1}BP$. On a alors :

$$CD = P^{-1}BPP^{-1}AP = P^{-1}BAP = P^{-1}BB^2P = P^{-1}B^3P = P^{-1}B^2BP = P^{-1}ABP = P^{-1}APP^{-1}BP = DC$$

Ainsi C et D commutent. En écrivant la relation $CD = DC$ avec une matrice $C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ quelconque, on obtient par résolution du système associé que C s'écrit sous la forme :

$$C = \begin{pmatrix}a & b & 0\\ d & e & 0\\ 0 & 0 & i\end{pmatrix} \quad \text{où} \quad (a,b,d,e,i) \in \mathbb{R}^5 \qquad (\star)$$

De plus, on a $C^2 = (P^{-1}BP)^2 = P^{-1}B^2P = P^{-1}AP = D$. En écrivant cette relation avec la matrice C sous la forme décrite par la relation $(\star)$, il vient le système suivant :

$$\begin{cases} a^2+bd = 1\\ d(a+e) = 0\\ b(a+e) = 0\\ e^2+bd = 1\\ i^2 = 4\end{cases}$$

Dans le cas $a \neq -e$, le système se résout de la façon suivante :

$$\begin{cases} a \neq -e\\ a^2+bd = 1\\ d(a+e) = 0\\ b(a+e) = 0\\ e^2+bd = 1\\ i^2 = 4\end{cases} \iff \begin{cases} a \neq -e\\ a^2+bd = 1\\ d = 0\\ b = 0\\ e^2+bd = 1\\ i^2 = 4\end{cases} \iff \begin{cases} a \neq -e\\ a^2 = 1\\ d = 0\\ b = 0\\ e^2 = 1\\ i^2 = 4\end{cases} \iff \begin{cases} a = 1\\ d = 0\\ b = 0\\ e = 1\\ i = \pm 2\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -1\\ d = 0\\ b = 0\\ e = -1\\ i = \pm 2\end{cases}$$

Dans le cas $a = -e$, le système se résout de la façon suivante :

$$\begin{cases} a = -e\\ a^2+bd = 1\\ d(a+e) = 0\\ b(a+e) = 0\\ e^2+bd = 1\\ i^2 = 4\end{cases} \iff \begin{cases} a = -e\\ a^2+bd = 1\\ i = \pm 2\end{cases}$$

Ainsi, on a prouvé que la matrice C est dans l'ensemble $F \cup G$ où :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & -a & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & -a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ (a,b,d) \in \mathbb{R}^3, \ a^2 + bd = 1 \right\}$$

Cela donne enfin que $B = PCP^{-1}$ est dans $H = \{PMP^{-1}, \ M \in F \cup G\}$.

- **(Synthèse)** Réciproquement, on peut vérifier que toute matrice B de H vérifie bien $B^2 = A$.

3. Les valeurs propres de A sont racines de tout polynôme annulateur de A. Ainsi, si P est annulateur de A, il admet au moins 1 et 4 comme racines. Si l'on cherche un polynôme annulateur de degré 2 de A, un bon candidat est *a priori* $P(X) = (X-1)(X-4)$. Après vérification, on a bien $P(A) = (A - I_3)(A - 4I_3) = A^2 - 5A + 4I_3 = 0$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On réalise la division euclidienne de X^n par $P(X) = (X-1)(X-4)$ en écrivant $X^n = Q_n(X)P(X) + R_n(X)$. Par définition de la division euclidienne, le polynôme R_n est de degré au plus 1 et on l'écrit $R_n(X) = a_n X + b_n$. En évaluant la relation précédente en les racines de P, c'est-à-dire en $X = 1$ et $X = 4$, on trouve que :

$$X^n = Q_n(X)P(X) + \frac{4^n - 1}{3} X + \frac{4 - 4^n}{3}$$

En appliquant en la matrice A et en utilisant le fait que P est annulateur de A, il vient :

$$A^n = \frac{4^n - 1}{3} A + \frac{4 - 4^n}{3} I_3$$

Exercice 2

1. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On a, par application de la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \varphi(X^k) &= (X+2)X^k - X(X+1)^k \\ &= X^{k+1} + 2X^k - X \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} X^p \\ &= X^{k+1} + 2X^k - X \left(X^k + kX^{k-1} + \sum_{p=0}^{k-2} \binom{k}{p} X^p \right) \\ &= (2-k)X^k - \sum_{p=0}^{k-2} \binom{k}{p} X^{p+1} \end{aligned}$$

et on en déduit immédiatement que :

- Si $k \neq 2$, $\varphi(X^k)$ est de degré k et de coefficient dominant $(2-k)$;
- Si $k = 2$, $\varphi(X^k)$ est de degré 1 et de coefficient dominant -1.

2. La linéarité de φ est évidente. De plus, la question précédente montre que $\varphi(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Ainsi, par linéarité de φ, on obtient $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$ et φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Le calcul de la question **1.** montre que, pour $k \in [\![0, n]\!]$, le polynôme $\varphi(X^k)$ se décompose sur la famille $(1, X, \dots, X^k)$. Ainsi la matrice A est triangulaire supérieure. De plus, les coefficients diagonaux de A sont constitués des coefficients selon X^k des polynômes $\varphi(X^k)$, c'est-à-dire des $(2-k)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.

4. La matrice A étant triangulaire, on lit ses valeurs propres sur la diagonale. Ainsi $\mathrm{sp}(\varphi) = \mathrm{sp}(A) = \{2-k, \ k \in [\![0, n]\!]\}$. Finalement, φ, endomorphisme sur un espace de dimension $n+1$, admet $n+1$ valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable.

Exercice 3

1. Le polynôme $P(X) = X^3 - X^2 = X^2(X-1)$ est annulateur de A. Ainsi, les valeurs propres de A étant racines de tout polynôme annulateur de A, on a $\mathrm{sp}(A) \subset \{0,1\}$. On note m_0 et m_1 les multiplicités des valeurs propres 0 et 1 en convenant qu'elles valent 0 si la valeur n'est pas valeur propre de A. En se plaçant dans $\mathbb{C}$ où χ_A est scindé, la trace de A vaut la somme des valeurs propres de A comptées avec multiplicité. Cela donne $0m_0 + 1m_1 = \mathrm{Tr}(A) = n$, c'est-à-dire $m_1 = n$. Comme on a $m_0 + m_1 = n$, on obtient aussi $m_0 = 0$. Ainsi 0 n'est pas valeur propre de A et 1 est valeur propre de A de multiplicité n. Enfin, puisque 0 n'est pas valeur propre de A, A est inversible et en multipliant par $(A^{-1})^2$ dans la relation $A^3 = A^2$ il vient $A = I_n$. Réciproquement, $A = I_n$ satisfait bien $A^3 = A^2$ et $\mathrm{Tr}(A) = n$.
2. Le polynôme $P(X) = X^4 - 7X^3 + 12X^2 = X^2(X-3)(X-4)$ est annulateur de A. Ainsi, les valeurs propres de A étant racines de tout polynôme annulateur de A, on a $\mathrm{sp}(A) \subset \{0,3,4\}$. On note m_0, m_3 et m_4 les multiplicités des valeurs propres 0, 3 et 4 en convenant qu'elles valent 0 si la valeur n'est pas valeur propre de A. En se plaçant dans $\mathbb{C}$ où χ_A est scindé, la trace de A vaut la somme des valeurs propres de A comptées avec multiplicité. Cela donne $\mathrm{Tr}(A) = 0m_0 + 3m_3 + 4m_4 = 3m_3 + 4m_4$. On en déduit directement que $\mathrm{Tr}(A) \in \mathbb{N}$ et en particulier que $\mathrm{Tr}(A) \geqslant 0$. De plus, on a $m_0 + m_3 + m_4 = n$ donc $m_3 + m_4 \leqslant n$. Ainsi $\mathrm{Tr}(A) = 3m_3 + 4m_4 \leqslant 4m_3 + 4m_4 = 4(m_3 + m4) \leqslant 4n$.

Exercice 4★

1. On observe facilement que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $u_A^k(M) = A^kM$. Par linéarité, on en déduit que pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ et toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $P(u_A)(M) = P(A)M$, ce qui s'écrit aussi $P(u_A) = u_{P(A)}$.
Supposons maintenant A diagonalisable. Par le cours, il existe un polynôme P annulateur scindé à racines simples de A. On en déduit $P(u_A) = u_{P(A)} = u_0 = 0$ de sorte que P est également un polynôme annulateur scindé à racines simples de u_A, ce qui donne la diagonalisabilté de u_A d'après le cours.
Réciproquement, supposons u_A diagonalisable. Par le cours, il existe un polynôme P annulateur scindé à racines simples de u_A. On en déduit $u_{P(A)} = P(u_A) = 0$, c'est-à-dire que $P(A)M = 0$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En choisissant $M = I_n$ il vient $P(A) = 0$. Ainsi, P est également un polynôme annulateur scindé à racines simples de A, ce qui donne la diagonalisabilté de A d'après le cours.
2. Soient $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On considère la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ notée $\mathscr{B}_c$ et rangée dans l'ordre suivant :
$$\mathscr{B}_c = \{E_{1,1}, E_{2,1}, \dots, E_{n,1}, \dots, E_{1,n}, \dots, E_{n,n}\}$$
On obtient après calculs que la matrice de u_A dans la base $\mathscr{B}_c$ est la matrice diagonale par blocs suivante :
$$\begin{pmatrix} A & & \\ & \ddots & \\ & & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{K})$$
Sur cette matrice, on lit immédiatement que $\mathrm{rg}(u_A) = n\,\mathrm{rg}(A)$, $\mathrm{Tr}(u_A) = n\,\mathrm{Tr}(A)$ et $\det(u_A) = (\det A)^n$.

Exercice 5★

1. Soit χ_A le polynôme caractéristique de A que l'on écrit sous la forme $\chi_A(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + (-1)^n \det(A)$ en se rappelant que le polynôme caractéristique est unitaire de degré n et que son coefficient constant vaut $(-1)^n \det(A)$. Par le théorème de Cayley-Hamilton, on sait que χ_A annule A, ce qui donne la relation :
$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + (-1)^n \det(A) I_n = 0$$
En prenant la trace et en utilisant la linéarité de cette dernière puis l'hypothèse, il vient $(-1)^n \det(A) n = 0$, c'est-à-dire $\det(A) = 0$.

2. La question précédente donne que la matrice A n'est pas inversible et donc que 0 est valeur propre de A. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A. On note x un vecteur propre de u associé à la valeur propre 0. On complète (x) en une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{K}^n$. La matrice de A dans cette base $\mathscr{B}$ est bien de la forme :

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & & \mathrm{L} & \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathrm{B} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad \mathrm{L} \in \mathscr{M}_{1,n-1}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad \mathrm{B} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$$

ce qui prouve que A est bien semblable à une matrice dont la première colonne est nulle.

3. On procède par récurrence sur $n \geqslant 1$.

- **Initialisation :** Si $n = 1$, la matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_1(\mathbb{K})$ vérifie $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = 0$, ce qui donne $\mathrm{A} = 0$ et A est donc bien nilpotente.
- **Hérédité :** Supposons que le résultat est acquis pour un rang $n-1$ avec $n \geqslant 2$. On se donne A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}^k) = 0$ pour $k \in [\![1, n]\!]$. Par la question précédente, A est semblable à la matrice $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u)$. Par calculs sur une matrice triangulaire par blocs, on a :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad (\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u))^k = \begin{pmatrix} 0 & & \widetilde{\mathrm{L}}_k & \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathrm{B}^k & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

  Ainsi, $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ on a :

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{B}^k) = 0 + \mathrm{Tr}(\mathrm{B}^k) = \mathrm{Tr}((\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u))^k) = \mathrm{Tr}(\mathrm{A}^k) = 0$$

  On obtient donc que B satisfait les hypothèses de l'hypothèse de récurrence au rang $n-1$ et on en déduit que B est nilpotente. Il existe ainsi $p \geqslant 1$ tel que $\mathrm{B}^p = 0$. On a alors :

$$(\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u))^p = \begin{pmatrix} 0 & & \widetilde{\mathrm{L}}_p & \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathrm{B}^p & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & \widetilde{\mathrm{L}}_p & \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{0} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

  et on vérifie facilement que $(\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u))^{2p} = 0$. Finalement, $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u)$ et A étant semblables, on aura aussi $\mathrm{A}^{2p} = 0$, ce qui donne bien que A est nilpotente et conclut la phase d'hérédité.