DEVOIR À LA MAISON N°3

Pour le lundi 7 novembre

Exercice

Dans la suite, on travaille avec $\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes à coefficients réels de degré au plus n. On se permettra d'identifier polynômes et fonctions polynomiales.

On introduit les deux applications N et L définies sur $\mathbb{R}_n[X]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$\forall P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X], \quad N(P) = \max_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k| \qquad \text{et} \qquad L(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|$$

1. Prouver que N et L sont des normes sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Le but de l'exercice est de déterminer deux constantes réelles $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ vérifiant :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad L(P) \leqslant C_1 N(P) \qquad \text{et} \qquad N(P) \leqslant C_2 L(P)$$

2. Prouver que $C_1 = n+1$ vérifie $L(P) \leqslant C_1 N(P)$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
Trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ pour lequel il y a égalité.

On cherche maintenant à obtenir une constante C_2 qui satisfait ce que l'on cherche. Pour ce faire, on introduit une suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ en posant :

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad T_{k+1} = 2XT_k - T_{k-1}$$

On pose par ailleurs :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \varphi(P,Q) = \int_0^{\pi} P(\cos\theta)Q(\cos\theta)\,d\theta$$

3. Déterminer T_2, T_3 et T_4.

4. Si $k \in \mathbb{N}$, donner le degré et le coefficient dominant de T_k.

5. Pour $k \in \mathbb{N}$, vérifier que T_k est le seul polynôme qui vérifie :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$$

6. Justifier que $(T_0, \ldots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

7. Si k et ℓ sont deux entiers naturels distincts, calculer $\varphi(T_k, T_k)$ et $\varphi(T_k, T_\ell)$.

8. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Avec la question **6**, on sait qu'il existe un (unique) $n-$uplet $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k T_k$$

8.1. Exprimer $\varphi(P, T_k)$ en fonction de α_k pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

8.2. Établir que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad |\alpha_k| \leqslant 2L(P)$$

9. Si $n \in \mathbb{N}^*$, prouver que :

$$N(T_{n+1}) \leqslant 2N(T_n) + N(T_{n-1})$$

10. On pose $q = 1+\sqrt{2}$. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{N}(\mathrm{T}_n) \leqslant q^n$$

11. Conclure que :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}], \quad \mathrm{N}(\mathrm{P}) \leqslant q^{n+1}\sqrt{2}\mathrm{L}(\mathrm{P})$$

Exercice

On note $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des matrices carrées à 2 lignes et 2 colonnes et à coefficients réels. On introduit $\mathscr{D}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, et $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ celui des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

On rappelle les dimensions des sous-espaces vectoriels $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$:

$$\dim(\mathscr{S}_2(\mathbb{R})) = 3 \qquad \text{et} \qquad \dim(\mathscr{A}_2(\mathbb{R})) = 1$$

Enfin, on pourra utiliser sans justification le résultat admis suivant :

> **Théorème 1** – *Théorème spectral*
>
> Toute matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie I

1. Exhiber un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ constitué de matrices diagonalisables.
2. En déduire la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathscr{D}_2(\mathbb{R})$.
3. L'ensemble $\mathscr{D}_2(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$? Justifier.
   On pourra utiliser des arguments de dimension.
4. Déterminer alors tous les sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ contenant $\mathscr{D}_2(\mathbb{R})$.
5. Soient $\Omega = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ (a-d)^2+4bc > 0\right\}$ et $\mathrm{F} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ (a-d)^2+4bc \geqslant 0\right\}$.

   5.1. Montrer que Ω est un ouvert de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et F un fermé de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

   5.2. Prouver que l'on a $\Omega \subset \mathscr{D}_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{F}$.

   5.3. L'ensemble $\mathscr{D}_2(\mathbb{R})$ est-il un fermé de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$? Un ouvert de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$? Justifier.

DEVOIR À LA MAISON N°3★

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe une norme $\|.\|$ sur E telle que l'on ait :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \|u(x)\| \leqslant \|x\|$$

Pour tout entier naturel k non nul, on considère l'endomorphisme :

$$r_k = \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{k-1} u^\ell = \frac{1}{k}(\mathrm{I_E} + u + u^2 + \cdots + u^{k-1})$$

où $\mathrm{I_E}$ représente l'endomorphisme identité de E.

1. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{I_E})$. Déterminer $\lim_{k\to+\infty} r_k(x)$.
2. Soit $x \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{I_E})$. Montrer que $\lim_{k\to+\infty} r_k(x) = 0_\mathrm{E}$.
3. En déduire que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{I_E}) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{I_E})$.
4. Soit $x \in \mathrm{E}$, un vecteur quelconque. Montrer que la suite $(r_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un vecteur de E, que l'on notera $p(x)$. Interpréter géométriquement l'application $p : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ ainsi définie.

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On suppose qu'il existe une norme, aussi notée $\|\cdot\|$, sur l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ identifié à $\mathbb{R}^n$, telle que, pour tout $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on ait $\|\mathrm{AX}\| \leqslant \|\mathrm{X}\|$. Pour tout k entier naturel non nul, on considère la matrice :

$$\mathrm{R}_k = \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{k-1} \mathrm{A}^\ell = \frac{1}{k}(\mathrm{I}_n + \mathrm{A} + \mathrm{A}^2 + \cdots + \mathrm{A}^{k-1})$$

où I_n est la matrice identité dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

5. Montrer que la suite de matrices $(\mathrm{R}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice P telle que $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$.

On fixe dans ce qui suit un entier $n \geqslant 2$. On notera $\mathrm{U} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice-colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1. Une matrice carrée $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si elle vérifie les conditions suivantes :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} \geqslant 0 \qquad (\mathrm{C}_1) \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1 \qquad (\mathrm{C}_2)$$

Nous dirons aussi qu'une matrice ligne $\mathrm{L} = (\lambda_1 \ \cdots \ \lambda_n) \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est stochastique lorsque ses coefficients λ_i sont tous positifs ou nuls et de somme égale à 1.

6. Vérifier que la condition (C_2) équivaut à la condition $\mathrm{AU} = \mathrm{U}$.
7. En déduire que l'ensemble $\mathscr{E}$ des matrices stochastiques carrées d'ordre n est stable pour le produit matriciel.
8. Montrer que cet ensemble $\mathscr{E}$ est une partie fermée et convexe de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit l'espace $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\|\mathrm{X}\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$ si $\mathrm{X} = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

9. Montrer que si $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique, alors on a $\|\mathrm{AX}\|_\infty \leqslant \|\mathrm{X}\|_\infty$ pour tout $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Dans les questions suivantes, on note $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique et on suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que la matrice A^p ait tous ses coefficients strictement positifs. Pour tout k entier naturel non nul, on posera dans la suite :

$$\mathrm{R}_k = \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{k-1} \mathrm{A}^\ell$$

10. Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}^p - \mathrm{I}_n)$ est de dimension 1.

Si $\mathrm{X} = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{A}^p - \mathrm{I}_n)$ *et* $s \in [\![1\,,n]\!]$ *vérifie* $x_s = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} x_j$*, on montrera que* $x_j = x_s$ *pour tout* $j \in [\![1\,,n]\!]$.

11. En déduire que $\mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) = \mathrm{Vect}(\mathrm{U})$.

12. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la matrice R_k est stochastique.

13. Montrer que la suite $(\mathrm{R}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice P, stochastique, de rang 1.

14. En déduire que l'on peut écrire $\mathrm{P} = \mathrm{UL}$, où $\mathrm{L} = (\lambda_1 \ \cdots \ \lambda_n) \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est une matrice-ligne stochastique.

15. Montrer que $\mathrm{PA} = \mathrm{P}$. En déduire que L est la seule matrice ligne stochastique vérifiant $\mathrm{LA} = \mathrm{L}$.

16. Montrer que les coefficients de la matrice ligne L sont tous strictement positifs.

17. Montrer que le réel 1 est valeur propre simple de A.
*On pourra utiliser le résultat de la question **3**.*