

CORRIGÉ



EXERCICE

1. On commence par traiter le cas de l'application N.

- **Positivité :** On a clairement $N(P) \geq 0$ pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
- **Homogénéité :** Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a :

$$N(\lambda P) = \max_{0 \leq k \leq n} |\lambda a_k| = \max_{0 \leq k \leq n} |\lambda| |a_k| = |\lambda| \max_{0 \leq k \leq n} |a_k| = |\lambda| N(P)$$

- **Inégalité triangulaire :** Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$ alors, par inégalité triangulaire :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, |a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k| \leq \max_{0 \leq k \leq n} |a_k| + \max_{0 \leq k \leq n} |b_k| = N(P) + N(Q)$$

On en déduit que :

$$N(P + Q) = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k + b_k| \leq N(P) + N(Q)$$

- **Séparation :** On se donne $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ tel que $N(P) = 0$. Par définition, cela donne $|a_k| = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, c'est-à-dire $a_k = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ soit $P = 0$.

On a bien démontré que N est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On poursuit avec le cas de l'application L.

- **Positivité :** On a clairement $L(P) \geq 0$ pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
- **Homogénéité :** Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a :

$$L(\lambda P) = \sup_{t \in [-1, 1]} |\lambda P(t)| = \sup_{t \in [-1, 1]} |\lambda| |P(t)| = |\lambda| \sup_{t \in [-1, 1]} |P(t)| = |\lambda| L(P)$$

- **Inégalité triangulaire :** Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ alors, par inégalité triangulaire :

$$\forall t \in [-1, 1], |P(t) + Q(t)| \leq |P(t)| + |Q(t)| \leq \sup_{t \in [-1, 1]} |P(t)| + \sup_{t \in [-1, 1]} |Q(t)| = L(P) + L(Q)$$

On en déduit que :

$$L(P + Q) = \sup_{t \in [-1, 1]} |P(t) + Q(t)| \leq L(P) + L(Q)$$

- **Séparation :** Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $L(P) = 0$. Par définition, cela donne $|P(t)| = 0$ pour tout $t \in [-1, 1]$, c'est-à-dire que $P = 0$ sur $[-1, 1]$. Ainsi P a une infinité de racines et est de degré n et on obtient $P = 0$.

On a bien démontré que L est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$. Si $t \in [-1, 1]$, on a, par inégalité triangulaire :

$$|P(t)| = \left| \sum_{k=0}^n a_k t^k \right| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| \underbrace{|t|^k}_{\leq 1} \leq \sum_{k=0}^n |a_k| \leq \sum_{k=0}^n \max_{0 \leq k \leq n} |a_k| = (n+1)N(P)$$

Ceci valant pour tout $t \in [-1, 1]$, il vient :

$$L(P) = \sup_{t \in [-1, 1]} |P(t)| \leq (n+1)N(P)$$

Le polynôme $P = X^n + X^{n-1} + \dots + 1$ permet de réaliser l'égalité puisque l'on a facilement $N(P) = 1$ et $L(P) = (n+1)$.

3. Grâce à la relation de récurrence qui définit la suite $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$, on trouve :

$$T_2 = 2X^2 - 1, \quad T_3 = 4X^3 - 3X \quad \text{et} \quad T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$$

4. Tout d'abord, T_0 est de degré 0 et de coefficient dominant 1. On prouve ensuite par récurrence double sur $k \in \mathbb{N}^*$ que T_k est de degré k et que son coefficient dominant est 2^{k-1} .

- **Initialisation :** Le polynôme $T_1 = X$ est bien de degré 1 et de coefficient dominant $1 = 2^{1-1}$ et le polynôme $T_2 = 2X^2 - 1$ est bien de degré 2 et de coefficient dominant $2 = 2^{2-1}$.
- **Hérédité :** Pour $k \geq 1$, on suppose que T_k et T_{k+1} sont de degrés respectifs k et $k+1$ et de coefficients dominants respectifs 2^{k-1} et 2^k . On a alors :

$$T_{k+2} = 2XT_{k+1} - T_k$$

On obtient alors en étudiant cette égalité que T_{k+2} est de degré $k+2$ et de coefficient dominant égal à deux fois celui de T_{k+1} , c'est-à-dire à $2 \times 2^k = 2^{k+1} = 2^{k+2-1}$ comme souhaité.

D'où le résultat par principe de récurrence.

5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On va prouver que $T_k(\cos \theta) = \cos(k\theta)$ par récurrence double sur $k \geq 0$.

- **Initialisation :** Étant donné que $T_0 = 1$ et $T_1 = X$, on a pour $k = 0$ et $k = 1$:

$$T_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0 \cdot \theta) \quad \text{et} \quad T_1(\cos \theta) = \cos(\theta) = \cos(1 \cdot \theta)$$

- **Hérédité :** Pour $k \geq 0$, on suppose le résultat vrai aux rangs k et $k+1$. On a alors, par la relation de récurrence définissant la suite $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ puis par utilisation des hypothèses de récurrence :

$$T_{k+2}(\cos \theta) = 2 \cos(\theta) T_{k+1}(\cos \theta) - T_k(\cos \theta) = 2 \cos(\theta) \cos((k+1)\theta) - \cos(k\theta)$$

En utilisant la formule de trigonométrie $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$ pour $a, b \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$\begin{aligned} T_{k+2}(\cos \theta) &= 2 \cos(\theta) \cos((k+1)\theta) - \cos(k\theta) \\ &= 2 \cos(\theta) \cos((k+1)\theta) - \cos((k+1)\theta - \theta) \\ &= 2 \cos(\theta) \cos((k+1)\theta) - \cos((k+1)\theta) \cos(\theta) - \sin((k+1)\theta) \sin(\theta) \\ &= \cos(\theta) \cos((k+1)\theta) - \sin((k+1)\theta) \sin(\theta) \\ &= \cos((k+1)\theta + \theta) = \cos((k+2)\theta) \end{aligned}$$

D'où le résultat par principe de récurrence.

Il reste à prouver l'unicité. On fixe $k \in \mathbb{N}$ et on se donne T un polynôme vérifiant $T(\cos \theta) = \cos(k\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. On a alors $T(\cos \theta) = T_k(\cos \theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, de sorte que T et T_k coïncident sur $[-1, 1]$ puisque $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$. Ainsi le polynôme $T - T_k$ a une infinité de racines, il est donc nul et il vient ainsi $T = T_k$.

6. Avec la question 4, les polynômes T_0, \dots, T_n sont non nuls et de degrés échelonnés. Ainsi, ils forment une famille libre. De plus, le cardinal de cette famille est égal à $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ et elle forme donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

7. ■ Si $k = \ell = 0$, on a :

$$\varphi(T_0, T_0) = \int_0^\pi T_0(\cos \theta) T_0(\cos \theta) d\theta = \int_0^\pi 1 \cdot d\theta = \pi$$

- Si $k > 0$, on a, grâce à la relation de la question 5 :

$$\begin{aligned} \varphi(T_k, T_k) &= \int_0^\pi T_k(\cos \theta) T_k(\cos \theta) d\theta = \int_0^\pi \cos^2(k\theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{\cos(2k\theta) + 1}{2} d\theta \\ &= \left[\frac{\sin(2k\theta)}{4k} \right]_0^\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

- Si $k > 0$ ou $\ell > 0$, on a, grâce à la relation de la question 5 :

$$\begin{aligned}\varphi(T_k, T_\ell) &= \int_0^\pi T_k(\cos\theta)T_\ell(\cos\theta) d\theta = \int_0^\pi \cos(k\theta) \cos(\ell\theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{\cos((k+\ell)\theta) + \cos((k-\ell)\theta)}{2} d\theta \\ &= \left[\frac{\sin((k+\ell)\theta)}{2(k+\ell)} \right]_0^\pi + \left[\frac{\sin((k-\ell)\theta)}{2(k-\ell)} \right]_0^\pi = 0\end{aligned}$$

8. 8.1. On fixe $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a alors, par linéarité de l'intégrale et avec la question précédente :

$$\begin{aligned}\varphi(P, T_k) &= \int_0^\pi \left(\sum_{\ell=0}^n \alpha_\ell T_\ell(\cos\theta) \right) T_k(\cos\theta) d\theta = \sum_{\ell=0}^n \alpha_\ell \int_0^\pi T_\ell(\cos\theta) T_k(\cos\theta) d\theta \\ &= \sum_{\ell=0}^n \alpha_\ell \underbrace{\varphi(T_\ell, T_k)}_{=0 \text{ si } \ell \neq k} = \alpha_k \varphi(T_k, T_k) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \alpha_k & \text{si } k > 0 \\ \pi \alpha_k & \text{si } k = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

- 8.2. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on utilise la question précédente, l'inégalité triangulaire pour les intégrales et la relation de la question 5 pour obtenir :

$$|\alpha_k| = \frac{2}{\pi} |\varphi(P, T_k)| = \frac{2}{\pi} \left| \int_0^\pi P(\cos\theta) T_k(\cos\theta) d\theta \right| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \underbrace{|P(\cos\theta)|}_{\in [-1,1]} \underbrace{|\cos(k\theta)|}_{\leq 1} d\theta \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)| d\theta = 2L(P)$$

Pour $k = 0$, on obtient de façon similaire $|\alpha_0| \leq L(P)$ de sorte que l'on a encore $|\alpha_0| \leq 2L(P)$.

9. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Avec la relation de récurrence définissant la suite $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et par inégalité triangulaire et homogénéité, on peut écrire :

$$N(T_{n+1}) = N(2XT_n - T_{n-1}) \leq N(2XT_n) + N(-T_{n-1}) = 2N(XT_n) + N(T_{n-1})$$

Enfin, comme les polynômes XT_n et T_n ont les mêmes coefficients, on a clairement $N(XT_n) = N(T_n)$, ce qui donne le résultat escompté.

10. On procède par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation :** Si $n = 0$, on a $N(T_0) = N(1) = 1 \leq 1 = q^0$. De plus, si $n = 1$, on a $N(T_1) = N(X) = 1 \leq 1 + \sqrt{2} = q^1$.
- **Hérédité :** On suppose le résultat vérifié aux rangs n et $n + 1$ pour un $n \in \mathbb{N}$. Avec la question précédente et grâce aux hypothèses de récurrence, il vient :

$$N(T_{n+2}) \leq 2N(T_{n+1}) + N(T_n) \leq 2q^{n+1} + q^n = q^n(2q + 1)$$

De plus, on a $q^2 = (1 + \sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 1 + 2(1 + \sqrt{2}) = 1 + 2q$ de sorte que l'on obtient :

$$N(T_{n+2}) \leq q^n(2q + 1) = q^n \cdot q^2 = q^{n+2}$$

D'où le résultat par principe de récurrence.

11. On fixe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ que l'on décompose comme à la question 8 sous la forme $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k T_k$. Par inégalité triangulaire et homogénéité on a déjà :

$$N(P) = N\left(\sum_{k=0}^n \alpha_k T_k\right) \leq \sum_{k=0}^n |\alpha_k| N(T_k)$$

On utilise alors les questions 8.2 et 10 pour finalement obtenir :

$$N(P) \leq \sum_{k=0}^n |\alpha_k| N(T_k) \leq \sum_{k=0}^n (2L(P)) q^k = 2L(P) \sum_{k=0}^n q^k = 2L(P) \frac{\overbrace{q^{n+1} - 1}^{\leq q^{n+1}}}{\underbrace{q - 1}_{=\sqrt{2}}} \leq \sqrt{2} q^{n+1} L(P)$$

EXERCICE

1. Avec le rappel, le sous-espace $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension 3 et constitué de matrices diagonalisables d'après le théorème spectral.
2. On vient de voir que $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ contient un sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 3. Par ailleurs, il n'en contient pas de dimension 4 puisque le seul sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 4 est $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et ce dernier n'est pas inclus dans $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$. En effet, on peut par exemple remarquer que la matrice élémentaire $E_{1,2}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'est pas diagonalisable (étant triangulaire, l'ensemble de ses valeurs propres est l'ensemble de ses coefficients diagonaux, à savoir $\{0\}$ et si elle était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle et donc nulle, ce qui n'est pas le cas). Ainsi, la dimension maximale d'un sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inclus dans $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ est 3.
3. Avec les questions 1 et 2, si $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ était un sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ce serait un sous-espace strict de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ contenant $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, donc on aurait $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ au vu des dimensions, ce qui est absurde puisqu'il existe des matrices diagonalisables non symétriques dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, comme par exemple la matrice suivante qui possède deux valeurs propres distinctes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Un sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ contenant $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ contient strictement $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ grâce aux questions 1 et 3, donc est de dimension p telle que $3 < p \leq 4$, c'est-à-dire $p = 4$. Ainsi le seul sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ contenant $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ est $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
5. Soient $\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, (a-d)^2 + 4bc > 0 \right\}$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, (a-d)^2 + 4bc \geq 0 \right\}$.

5.1. L'application :

$$\begin{aligned} \Delta : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto (a-d)^2 + 4bc \end{aligned}$$

est polynomiale en les coefficients des matrices, donc est continue d'après le cours.

Ainsi $\Omega = \Delta^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ est l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue donc Ω est un ouvert, et $F = \Delta^{-1}(\mathbb{R}_+)$ est l'image réciproque d'un fermé par une fonction continue donc F est un fermé.

5.2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Le polynôme caractéristique χ_M de M est donné par $\chi_M = X^2 - (a+d)X + (ad-bc)$ et a pour discriminant $(a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc = \Delta(M)$. Ainsi :

- Si $\Delta(M) > 0$, alors χ_M admet deux racines distinctes dans \mathbb{R} , donc M est diagonalisable. Donc $\Omega \subset \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$.
- Si M est diagonalisable, alors χ_M est scindé sur \mathbb{R} , donc admet deux racines réelles, ce qui implique $\Delta(M) \geq 0$. Donc $\mathcal{D}_2(\mathbb{R}) \subset F$.

5.3. On utilise la caractérisation séquentielle :

- Supposons $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ ouvert. Son complémentaire serait alors fermé, ce qui donnerait que toute suite convergente de matrices non diagonalisables converge vers une matrice elle aussi non diagonalisable. Mais les matrices $\frac{1}{n}E_{1,2}$ ne sont pas diagonalisables (voir la question 2) et convergent, quand n tend vers $+\infty$, vers la matrice nulle, qui est diagonalisable. On obtient une absurdité et $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ n'est donc pas ouvert.
- Supposons $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ fermé. Cela donnerait que toute suite convergente de matrices diagonalisables converge vers une matrice elle aussi diagonalisable. Mais les matrices $\frac{1}{n}E_{1,1} + E_{1,2}$ sont diagonalisables puisqu'elles ont deux valeurs propres distinctes $\frac{1}{n}$ et 0 et convergent, quand n tend vers $+\infty$, vers la matrice $E_{1,2}$, qui n'est pas diagonalisable (voir question 2). On obtient une absurdité et $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ n'est pas fermé.

CORRIGÉ



1. Soit $x \in \text{Ker}(u - I_E)$. On a $u(x) = x$ et, par récurrence immédiate, $u^k(x) = x$ pour tout $k \geq 1$. Ainsi, $r_k(x) = x$ pour tout $k \geq 1$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(x) = x$.
2. Soit $x \in \text{Im}(u - I_E)$. Il existe $y \in E$ tel que $x = (u - I_E)(y)$ et donc $x = u(y) - y$. On fixe $k \geq 1$. Pour $\ell \geq 0$, on a $u^\ell(x) = u^\ell(u(y) - y) = u^{\ell+1}(y) - u^\ell(y)$ et on obtient par télescopage :

$$r_k(x) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} (u^{\ell+1}(y) - u^\ell(y)) = \frac{1}{k} (u^k(y) - y)$$

Avec l'hypothèse de l'énoncé, on montre facilement, par récurrence, que $\|u^k(x)\| \leq \|x\|$. On en déduit grâce à l'inégalité triangulaire que :

$$\|r_k(x)\| \leq \frac{1}{k} (\|u^k(y)\| + \|y\|) \leq \frac{2\|y\|}{k}$$

Ce dernier majorant étant de limite nulle lorsque k tend vers $+\infty$, on conclut par comparaison que $\|r_k(x)\|$ tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$, c'est-à-dire que $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(x) = 0$.

3. Par théorème du rang, on a $\dim(\text{Ker}(u - I_E)) + \dim(\text{Im}(u - I_E)) = \dim(E)$ de sorte qu'il suffit de montrer que l'on a $\text{Im}(u - I_E) \cap \text{Ker}(u - I_E) = \{0\}$. Soit donc $x \in \text{Im}(u - I_E) \cap \text{Ker}(u - I_E)$. Avec les deux questions qui précèdent, la suite $(r_k(x))_{k \geq 1}$ est simultanément de limite x et 0, ce qui entraîne $x = 0$ par unicité de la limite. Cela prouve bien que $\text{Im}(u - I_E) \cap \text{Ker}(u - I_E) = \{0\}$.
4. Soit $x \in E$. On décompose x dans la somme directe précédente. Il existe $y \in \text{Ker}(u - I_E)$ et $z \in \text{Im}(u - I_E)$ tels que $x = y + z$. Pour $k \geq 1$, on a alors $r^k(x) = r^k(y) + r^k(z)$ qui tend vers y lorsque k tend vers $+\infty$ d'après les questions 1 et 2. Ainsi p est l'application qui à x associe la composante y de x selon $\text{Ker}(u - I_E)$ dans la décomposition en somme directe $E = \text{Ker}(u - I_E) \oplus \text{Im}(u - I_E)$. On reconnaît la définition de la projection sur $\text{Ker}(u - I_E)$ parallèlement à $\text{Im}(u - I_E)$.
5. En reprenant les calculs précédents, mais en version matricielle, on peut prouver que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} R_k X = P X$$

où P est la matrice dans la base canonique de la projection sur $\text{Ker}(A - I_n)$ parallèlement à $\text{Im}(A - I_n)$, ces sous-espaces étant supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Il reste à prouver que la suite $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ tend vers P dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme, le choix de cette norme n'ayant pas d'importance puisque l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie. On choisit de travailler avec une norme qui arrange les calculs, par exemple la norme euclidienne de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire la norme issue du produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: on pose $\|M\|^2 = \text{Tr}({}^t M M)$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Fixons une suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ et une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} M_k X = 0$$

et montrons que $\|M_k\|$ tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$. En notant $((Y_i))_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a par un calcul simple :

$$\forall k \geq 1, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad (M_k)_{i,j} = {}^t Y_j M_k Y_i$$

de sorte que, pour $k \geq 1$, on a :

$$\|M_k\|^2 = \text{Tr}({}^t M_k M_k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (M_k)_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ({}^t Y_j M_k Y_i)^2$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $M_k Y_i$ qui tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$. Par continuité, à $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ fixé, de l'application $X \mapsto {}^t Z X$ (elle est linéaire en dimension finie), on obtient ${}^t Y_j M_k Y_i$ qui tend vers 0 lorsque k tend vers

$+\infty$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Par somme, on a $\|M_k\|^2$ et donc $\|M_k\|$ qui tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$.

En appliquant ce qui précède à la suite de terme général $M_k = R_k - P$, on obtient que $\|R_k - P\|$ tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$, ce qui est la définition de la convergence de la suite $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ vers P dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Enfin, P étant la matrice d'une projection, on a bien $P^2 = P$.

6. On a par définition du produit matriciel :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (AU)_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} U_j = \sum_{j=1}^n a_{i,j}$$

On en déduit bien que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1 \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (AU)_i = 1 \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (AU)_i = U_i \iff AU = U$$

7. Soient A et B deux matrices stochastiques. On note $C = AB$. Vérifions que C vérifie (C_1) et (C_2) . On a d'une part :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^n \underbrace{a_{i,k}}_{\geq 0} \underbrace{b_{k,j}}_{\geq 0} \geq 0$$

D'autre part, en utilisant la nouvelle caractérisation de (C_2) donnée par la question précédente, on obtient directement $CU = ABU = AU = U$ puisque $AU = BU = U$. Ainsi $C = AB$ vérifie (C_1) et (C_2) et est bien stochastique.

8. On utilise la caractérisation séquentielle des fermés. Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite convergente de matrices stochastiques et A sa limite. Il s'agit de montrer que A est stochastique. Par résultat sur les suites coordonnées, on obtient :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad a_{i,j} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \underbrace{(A_k)_{i,j}}_{\geq 0} \geq 0$$

de sorte que tous les coefficients de A sont positifs. De plus, on a $A_k U = U$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, de sorte qu'en passant à la limite, par continuité de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto MU \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (linéaire en dimension finie), on a $AU = U$. Ainsi A est stochastique et \mathcal{E} est fermé.

Montrons maintenant que \mathcal{E} est convexe. On se donne A et B deux matrices stochastiques et $\lambda \in [0, 1]$ et il s'agit de montrer que $M = \lambda A + (1 - \lambda)B \in \mathcal{E}$. La positivité des coefficients de A et B entraîne celle des coefficients de M . De plus $MU = \lambda AU + (1 - \lambda)BU = \lambda U + (1 - \lambda)U = U$ ce qui donne (C_2) pour M qui est donc stochastique. On a ainsi prouvé que \mathcal{E} est convexe.

9. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |(AX)_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \cdot |x_j| \leq \|x\|_\infty \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \|x\|_\infty$$

où l'on a utilisé le fait que A vérifie la condition (C_2) . Ceci étant vrai pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$.

10. Notons $A^p = (\alpha_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$. La matrice A^p est une matrice stochastique par la question 7 et à coefficients strictement positifs par hypothèse. Soit $X \in \text{Ker}(A^p - I_n)$ et s un indice tel que x_s est le maximum des $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$. On a $A^p X = X$ et, en écrivant le coefficient d'indice s :

$$x_s = \sum_{i=1}^n \alpha_{s,i} x_i$$

Si, par l'absurde, il existait un indice $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $x_p < x_s$ alors, on aurait :

$$x_s = \sum_{i=1}^n \alpha_{s,i} x_i < x_s \sum_{i=1}^n \alpha_{s,i} = x_s$$

où l'on se sert de la positivité des $(\alpha_{s,i})_{1 \leq i \leq n}$ pour justifier que les inégalités $x_i \leq x_s$ restent dans le même sens et du fait que $\alpha_{s,p} > 0$ pour assurer que le terme x_p donnant une inégalité stricte est bien présent. Ceci est absurde donc les $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont tous égaux et $X \in \text{Vect}(U)$. Ainsi $\text{Ker}(A^p - I_n) \subset \text{Vect}(U)$. Mais, à nouveau, A^p étant une matrice stochastique, on a $U \in \text{Ker}(A - I_p)$. Ainsi $\text{Ker}(A^p - I_n) = \text{Vect}(U)$ est de dimension 1.

11. On sait déjà que $\text{Vect}(U) \subset \text{Ker}(A - I_n)$ car A est stochastique. Si $AX = X$ alors on montre par récurrence que $A^k X = X$ pour tout $k \geq 1$, ce qui donne en particulier $A^p X = X$. La question précédente montre que $X \in \text{Vect}(U)$ et ainsi $\text{Ker}(A - I_n) = \text{Vect}(U)$.

12. On fixe $k \geq 1$. Les matrices $(A^\ell)_{\ell \geq 0}$ sont toutes stochastiques par la question 7. La matrice R_k est à coefficients positifs comme somme de matrices à coefficients positifs et :

$$R_k U = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} A^\ell U = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} U = U$$

de sorte que R_k est bien stochastique.

13. Les questions 5 et 9 montrent que $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est convergente de limite P vérifiant $P^2 = P$. De plus, les questions 12 et 8 (\mathcal{E} est fermé) montrent que P est stochastique. Enfin, il a été prouvé dans la partie précédente que P est la matrice de la projection sur $\text{Ker}(A - I_n)$ parallèlement à $\text{Im}(A - I_n)$. On a donc $\text{Im}(P) = \text{Ker}(A - I_n) = \text{Vect}(U)$ par la question 11 et P est de rang 1.
14. Puisque $\text{Im}(P) = \text{Vect}(U)$, toutes les colonnes de P sont multiples de U et, pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe λ_i telle que la colonne i s'écrive $\lambda_i U$. En posant définissant la matrice ligne $L = (\lambda_1 \cdots \lambda_n)$ on a alors $P = UL$. Comme toutes les coordonnées de U valent 1, toutes les lignes de P valent L . Comme P est stochastique, L l'est aussi.
15. Fixons $k \geq 1$. Remarquons que :

$$R_k A = \frac{1}{k} \sum_{\ell=1}^k A^\ell = \frac{1}{k} ((k+1)R_{k+1} - I_n) = \frac{k+1}{k} R_{k+1} - \frac{1}{k} I_n$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient directement $PA = P$.

On rappelle que P est une matrice dont toutes les lignes sont égales à L . La matrice PA est ainsi une matrice dont toutes les lignes sont LA . L'égalité $PA = P$ donne ainsi $LA = L$. Si Y est une matrice ligne, $YA = Y$ s'écrit aussi ${}^t A {}^t Y = {}^t Y$ ou encore $({}^t A - I_n) {}^t Y = 0$. Or, avec la question 11 et le théorème du rang, $A - I_n$ est de rang $n - 1$ et il en est de même de ${}^t A - I_n$. Le noyau de ${}^t A - I_n$ est ainsi de dimension 1. Il contient la matrice ${}^t L$ qui est non nulle (car sinon $P = 0$). Ainsi, les matrices ligne Y vérifiant $YA = Y$ sont les multiples de L . La somme des coefficients de λL ne valent 1 que si $\lambda = 1$, on a finalement que L est la seule ligne stochastique telle que $LA = L$.

16. On montre par récurrence que $LA^k = L$ pour tout $k \geq 1$. En particulier, on a $LA^p = L$. Si, par l'absurde, on avait $\lambda_i = 0$, alors en regardant le i -ème coefficient de $LA^p = L$, on aurait, en notant $A^p = (\alpha_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_{k,i} = 0$$

Les coefficients $(\alpha_{k,i})_{1 \leq i \leq n}$ étant strictement positifs et les $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$ positifs non tous nuls, ceci est absurde. Ainsi L est à coefficients strictement positifs.

17. On sait que $\text{Ker}(A - I_n) \oplus \text{Im}(A - I_n) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par la question 3. Les espaces $F = \text{Ker}(A - I_n)$ et $G = \text{Im}(A - I_n)$ sont stables par l'endomorphisme canoniquement associé à A puisque ce sont des noyaux et images de polynômes en A . En notant $u_F \in \mathcal{L}(F)$ et $u_G \in \mathcal{L}(G)$ les endomorphismes induits, comme $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = F \oplus G$, on a grâce à un raisonnement avec des matrices par blocs que $\chi_u = \chi_{u_F} \chi_{u_G}$. Puisque F est de dimension 1 et que $u_F = \text{Id}_F$, on a $\chi_{u_F} = X - 1$. Comme $F \cap G = \{0\}$, $u_G - \text{Id}_G$ est inversible et 1 n'est pas racine de χ_{u_G} . De tout cela, on déduit que 1 est racine simple de χ_u et donc que 1 est valeur propre simple de A .