DEVOIR À LA MAISON N°4

Corrigé

Exercice

1. On fixe $x \in [0,+\infty[$. Si $x=0$, on a clairement la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n(0) = \sum_{n\geqslant 1} 0$. Si maintenant $x>0$, on peut écrire :

$$u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{xn^{\alpha+1}}$$

Or la série $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^{\alpha+1}$ est une série de Riemann convergente puisque $\alpha+1>1$ car $\alpha>0$ de sorte que la série à termes positifs $\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ converge par théorème de comparaison.
Ceci valant pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a bien prouvé la convergence simple de $\sum u_n$ sur $[0,+\infty[$.

2. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. On réalise une étude de la fonction u_n sur $[0,+\infty[$. La fonction u_n est clairement dérivable sur $[0,+\infty[$ avec :

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad u_n'(x) = \frac{1\cdot n^{\alpha}(1+nx^2) - 2n^{\alpha+1}x\cdot x}{n^{2\alpha}(1+nx^2)^2} = \frac{n^{\alpha} - n^{\alpha+1}x^2}{n^{2\alpha}(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{n^{\alpha}(1+nx^2)^2}$$

Ainsi, après étude du signe du numérateur, on obtient que u_n est croissante sur $[0,1/\sqrt{n}]$ et décroissante sur $[1/\sqrt{n},+\infty[$ de sorte que son maximum est atteint en $1/\sqrt{n}$. Enfin, la fonction u_n étant clairement positive sur $[0,+\infty[$, on peut conclure que :

$$\sup_{x\in[0,+\infty[} |u_n(x)| = \sup_{x\in[0,+\infty[} u_n(x) = u_n(1/\sqrt{n}) = \frac{1}{2n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

3. La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,+\infty[$ si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 1} \sup_{x\in[0,+\infty[} |u_n(x)|$ converge, ce qui équivaut, grâce à la question précédente, à la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} 1/(2n^{\alpha+1/2})$. Cette dernière série est une série de Riemann et elle converge si et seulement si $\alpha+1/2>1$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha>1/2$. D'où le résultat.

4. Soient $0<a<b$. On écrit :

$$\forall n\geqslant 1, \quad \forall x\in[a,b], \quad |u_n(x)| = \frac{x}{n^{\alpha}(1+nx^2)} \leqslant \frac{b}{n^{\alpha}(1+na^2)} = \beta_n$$

De plus, la série de terme général β_n est convergente puisque c'est une série à termes positifs avec :

$$\beta_n = \frac{b}{n^{\alpha}(1+na^2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{b}{a^2 n^{\alpha+1}}$$

et la série de terme général $b/(a^2n^{\alpha+1})$ est, à une constante près, une série de Riemann convergente puisque $\alpha+1>1$ car $\alpha>0$. Ceci permet de conclure que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[a,b]$.

5. Si $\alpha>1/2$, on a prouvé à la question **3** que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement $[0,+\infty[$. La convergence normale impliquant la convergence uniforme, on a le résultat.

6. **6.1.** On fixe $n\geqslant 0$ et $x\in[0,+\infty[$. Le reste étant une somme de termes positifs, on a déjà :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{k^{\alpha}(1+kx^2)}$$

Par croissance de la fonction $u\mapsto u^{\alpha}$, on peut écrire :

$$R_n(x) \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{k^{\alpha}(1+kx^2)} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{(2n)^{\alpha}(1+kx^2)}$$

Enfin, par croissance de $s \mapsto (2n)^s$ et puisque $\alpha \leqslant 1/2$, on obtient :

$$\mathrm{R}_n(x) \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{(2n)^\alpha(1+kx^2)} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{2n}(1+kx^2)}$$

6.2. Soit $a > 0$. Pour $n \geqslant 0$ et $x \in [0, a]$, on poursuit les minorations de la question précédente en observant que par croissance de $u \mapsto \sqrt{2n}(1+ux^2)$ on a :

$$\mathrm{R}_n(x) \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{2n}(1+kx^2)} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{2n}(1+2nx^2)} = \frac{nx}{\sqrt{2n}(1+2nx^2)}$$

Pour tout $n \geqslant 1$, en écrivant la minoration précédente pour $x = 1/\sqrt{n}$, on a, par positivé de R_n :

$$\forall n \geqslant 1, \quad |\mathrm{R}_n(1/\sqrt{n})| = \mathrm{R}_n(1/\sqrt{n}) \geqslant \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n}(1+2)} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

Ainsi la suite $(|\mathrm{R}_n(1/\sqrt{n})|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0. La suite de fonctions $(\mathrm{R}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge donc pas uniformément vers 0, ce qui montre que la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, a]$.

On introduit la fonction S définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

7. Soit $\alpha > 0$. On utilise le théorème de continuité d'une somme de série de fonctions pour prouver que S est continue sur $]0, +\infty[$.

- Les fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont toutes continues sur $]0, +\infty[$.
- Sur tout segment $[a, b]$ de $]0, +\infty[$, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement d'après la question **4** et donc uniformément.

Ainsi le théorème s'applique et donne la continuité de S sur $]0, +\infty[$.

8. Si $\alpha > 1/2$, la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$ d'après la question **5**. Par application du théorème de continuité d'une somme de série de fonctions, on prouve alors que S est continue sur $[0, +\infty[$.

9. **9.1.** Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_x est clairement décroissante sur $[1, +\infty[$ de sorte que par comparaison série – intégrale, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_n^{n+1} f_x(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f_x(n)$$

En sommant de $n = 1$ à $n = \mathrm{N}$ cette inégalité et en se servant de la relation de Chasles, on a bien :

$$\int_1^{\mathrm{N}+1} f_x(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n(x)$$

9.2. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. Pour $t \in [1, \mathrm{N}+1]$, par croissance de $s \mapsto t^s$ et puisque $\alpha \leqslant 1/2$, on peut écrire :

$$\frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)} \leqslant \frac{x}{t^\alpha(1+tx^2)} = f_x(t)$$

En intégrant par croissance de l'intégrale cette relation valable pour tout $t \in [1, \mathrm{N}+1]$ et en utilisant la question précédente, il vient bien :

$$\int_1^{\mathrm{N}+1} \frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^{\mathrm{N}+1} \frac{x}{t^\alpha(1+tx^2)}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{N}+1} f_x(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n(x)$$

9.3. En réalisant le changement de variable $u = x\sqrt{t}$, ce qui donne $\mathrm{d}u = x/(2\sqrt{t})\,\mathrm{d}t$, on obtient :

$$\int_1^{\mathrm{N}+1} \frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)}\,\mathrm{d}t = \int_x^{x\sqrt{\mathrm{N}+1}} \frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = 2\,[\mathrm{Arctan}\, u]_x^{x\sqrt{\mathrm{N}+1}} = 2\,\mathrm{Arctan}(x\sqrt{\mathrm{N}+1}) - 2\,\mathrm{Arctan}(x)$$

9.4. Les questions **9.2** et **9.3** permettent d'obtenir que :

$$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*, \quad 2\operatorname{Arctan}(x\sqrt{\mathrm{N}+1}) - 2\operatorname{Arctan}(x) \leqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n(x)$$

Puisque $x > 0$, on a $2\operatorname{Arctan}(x\sqrt{\mathrm{N}+1}) \to \pi$ lorsque $\mathrm{N} \to +\infty$ de sorte qu'en passant à la limite dans l'inégalité précédente lorsque $\mathrm{N} \to +\infty$, il vient :

$$\pi - 2\operatorname{Arctan} x \leqslant \mathrm{S}(x)$$

En supposant S continue en 0, on aurait $\mathrm{S}(x)$ qui tend vers $\mathrm{S}(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(0) = 0$ lorsque x tend vers 0. En passant à la limite quand x tend vers 0 dans l'inégalité précédente, cela donnerait $\pi \leqslant 0$, ce qui est absurde. Ainsi, S n'est pas continue en 0.

DEVOIR À LA MAISON N°4★

Partie I — Étude d'un premier opérateur

1. On se donne $f, g \in \mathrm{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a alors :

$$\forall x \in [0,1], \quad \mathrm{T}(f+\lambda g)(x) = x(f+\lambda g)\left(\frac{x}{2}\right) = xf\left(\frac{x}{2}\right) + \lambda x g\left(\frac{x}{2}\right) = \mathrm{T}(f)(x) + \lambda \mathrm{T}(g)(x)$$

de sorte que $\mathrm{T}(f+\lambda g) = \mathrm{T}(f) + \lambda \mathrm{T}(g)$ et T est donc linéaire. Par ailleurs, si $f \in \mathrm{E}$:

$$\forall x \in [0,1], \quad |\mathrm{T}(f)(x)| = \left|xf\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \underbrace{|x|}_{\leqslant 1}\left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right| \leqslant \|f\|_\infty$$

Cela donne alors, en passant à la borne supérieure, l'identité $\|\mathrm{T}(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$. On a donc la propriété (1) avec $\mathrm{M} = 1$. Ceci termine de prouver que T est un opérateur.

2. On suppose qu'une constante $\mathrm{M} \geqslant 0$ vérifie :

$$\forall f \in \mathrm{E}, \quad \|\mathrm{T}(f)\|_{\mathrm{E}} \leqslant \mathrm{M}\|f\|_{\mathrm{E}} \tag{1}$$

Pour $f : x \mapsto 1$, qui est dans E, on a $\mathrm{T}(f) : x \mapsto x$ et donc $\|\mathrm{T}(f)\|_\infty = \|f\|_\infty = 1$. En appliquant (1) avec cette fonction f, il vient $\mathrm{M} \geqslant 1$. Comme la question précédente assure que $\mathrm{M} = 1$ est une constante qui satisfait (1), c'est la plus petite constante possible.

3. On commence par déterminer le noyau de T. Soit $f \in \mathrm{Ker}(\mathrm{T})$. On a alors : $\forall x \in [0,1],\ xf(x/2) = 0$. Si $x > 0$, on obtient donc $f(x/2) = 0$, ce qui montre que f est nulle sur $]0,1/2]$. Par continuité, elle l'est aussi sur $[0,1/2]$.

Réciproquement, soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et nulle sur $[0,1/2]$. Alors, pour tout $x \in [0,1]$, on a $\mathrm{T}(f)(x) = xf(x/2) = 0$ puisque $x/2 \in [0,1/2]$. Ceci prouve $\mathrm{T}(f) = 0$. Ainsi :

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{T}) = \{f \in \mathrm{E},\ \forall x \in [0,1/2],\ f(x) = 0\}$$

On continue avec l'image de T. Soit $g \in \mathrm{Im}(\mathrm{T})$. Il existe donc une fonction continue f telle que $g = \mathrm{T}(f)$, c'est-à-dire telle que $g(x) = xf(x/2)$ pour tout $x \in [0,1]$. Ainsi :

$$g(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{g(x)-g(0)}{x} = f(x/2) \xrightarrow[x\to 0]{} f(0)$$

Ceci montre montre que g est dérivable en 0. L'image de T est incluse dans l'ensemble des éléments de E s'annulant en 0 et dérivables en 0.

Réciproquement, supposons $g \in \mathrm{E}$ nulle et dérivable en 0. Considérons la fonction f définie sur $[0,1]$ par :

$$f(0) = g'(0), \qquad \forall x \in]0,1/2], \quad f(x) = \frac{g(2x)}{2x} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]1/2,1], \quad f(x) = g(1)$$

Alors :

- f est continue sur $]0,1/2[\cup]1/2,1]$ de façon immédiate.
- f est continue en 0 puisque par définition de $g'(0)$ et avec $g(0) = 0$:

$$f(x) = \frac{g(2x)}{2x} = \frac{g(2x)-g(0)}{2x} \xrightarrow[x\to 0]{} g'(0) = f(0)$$

- f est continue en $1/2$ puisque :

$$\forall x \in]0,1/2],\ f(x) = \frac{g(2x)}{2x} \xrightarrow[\frac{1}{2}^-]{} = g(1) = f(1/2) \quad \text{et} \quad \forall x \in]1/2,1],\ f(x) = g(1) \xrightarrow[\frac{1}{2}^+]{} = g(1) = f(1/2)$$

- Par construction, on a $xf(x/2) = g(x)$ pour tout $x \in]0,1]$ et cela reste vrai en 0 par continuité des fonctions dans les deux membres.

On a ainsi $f \in \mathrm{E}$ et $\mathrm{T}(f) = g$ ce qui montre que $g \in \mathrm{Im}(\mathrm{T})$. En conclusion :

$$\mathrm{Im}(\mathrm{T}) = \{g \in \mathrm{E},\ g(0) = 0 \text{ et } g \text{ dérivable en } 0\}$$

4. La linéarité de T est toujours acquise. Reste la propriété (1) à démontrer. On se donne $f \in \mathrm{E}$ et on majore $\|\mathrm{T}(f)\|_2$ grâce au changement de variable $u = x/2$:

$$\|\mathrm{T}(f)\|_2^2 = \int_0^1 |\mathrm{T}(f)(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 f\left(\frac{x}{2}\right)^2\,\mathrm{d}x = 8\int_0^{1/2} \underbrace{u^2}_{\leqslant \frac{1}{4}} f^2(u)\,\mathrm{d}u \leqslant 2\int_0^{1/2} f^2(u)\,\mathrm{d}u \leqslant 2\int_0^1 |f(u)|^2\,\mathrm{d}u = 2\|f\|_2^2$$

où la dernière inégalité est justifiée par positivité de l'intégrale. On a donc la propriété (1) avec $\mathrm{M} = \sqrt{2}$.

5. On suppose qu'une constante $\mathrm{M} \geqslant 0$ vérifie :

$$\forall f \in \mathrm{E}, \quad \|\mathrm{T}(f)\|_{\mathrm{E}} \leqslant \mathrm{M}\|f\|_{\mathrm{E}} \tag{1}$$

Soit $n \geqslant 2$ et f_n la fonction proposée par l'énoncé. La fonction f_n est nulle hors de $[1/2 - 1/n, 1/2 + 1/n^2]$ et, étant donné que f_n est affine par morceaux, on peut trouver que :

$$\forall x \in [1/2 - 1/n, 1/2], \quad f_n(x) = n(x - 1/2 + 1/n) \qquad \text{et} \qquad \forall x \in [1/2, 1/2 + 1/n^2], \quad f_n(x) = -n^2(x - 1/2 - 1/n^2)$$

Par un calcul élémentaire, on a alors :

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 f_n(x)^2\,\mathrm{d}x = \int_{1/2-1/n}^{1/2+1/n^2} f_n(x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{n+1}{3n^2}$$

$$\|\mathrm{T}(f_n)\|_2^2 = \int_0^1 \mathrm{T}(f_n)(x)^2\,\mathrm{d}x = \int_{1-2/n}^{1+2/n^2} x^2 f_n(x/2)^2\,\mathrm{d}x = \frac{10n^5 + 4n^3 + 10n^2 + 4}{15n^6}$$

On en déduit aisément que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\|\mathrm{T}(f_n)\|_2^2}{\|f_n\|_2^2} = 2$$

En appliquant la relation (1) en f_n pour tout $n \geqslant 2$, en passant en quotient puis à la limite, on obtient donc que $\mathrm{M} \geqslant \sqrt{2}$. Mais la question précédente montre que cette constante convient, c'est donc la plus petite.

Partie II — Calculs de spectres

6. La linéarité de S et V est claire. De plus, si $u \in \mathrm{H}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{S}u)_k^2 = 0^2 + \sum_{k=1}^{n} u_{k-1}^2 = \sum_{k=0}^{n-1} u_k^2 \leqslant \|u\|_2^2$$

Ainsi, la suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^{n}(\mathrm{S}u)_k^2)_{n\in\mathbb{N}}$ de la série à termes positifs $\sum_{n\geqslant 0}(\mathrm{S}u)_n^2$ est majorée, ce qui implique la convergence de $\sum_{n\geqslant 0}(\mathrm{S}u)_n^2$. Ainsi $\mathrm{S}(u) \in \mathrm{H}$ et en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, il vient alors $\|\mathrm{S}u\|_2^2 \leqslant \|u\|_2^2$ et donc $\|\mathrm{S}u\|_2 \leqslant \|u\|_2$. On a bien prouvé que $\mathrm{S} \in \mathscr{L}(\mathrm{H})$. Un travail similaire permet de montrer que $\mathrm{V} \in \mathscr{L}(\mathrm{H})$ avec $\|\mathrm{V}u\|_2 \leqslant \|u\|_2$ pour tout $u \in \mathrm{H}$.

7. Soit $\lambda \in \sigma_p(\mathrm{S})$. Par définition, $\mathrm{S} - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathrm{H}}$ n'est pas injectif et il existe donc un élément non nul $u \in \mathrm{H}$ dans son noyau, c'est-à-dire tel que $\mathrm{S}(u) = \lambda u$. Cela donne :

$$0 = \lambda u_0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n-1} = \lambda u_n$$

Si $\lambda \neq 0$ alors $u_0 = 0$ puis, par récurrence, tous les $(u_n)_{n\geqslant 1}$ sont nuls. Ceci contredit $u \neq 0$. Sinon, les relations précédentes donnent $u_{n-1} = 0$ pour tout $n \geqslant 1$ et u est à nouveau nulle, ce qui est toujours exclu. Aucun λ ne convient et on a donc $\sigma_p(\mathrm{S}) = \emptyset$.

Soit $\lambda \in \sigma_p(\mathrm{V})$. Il existe donc $u \in \mathrm{H}$ non nul tel que $\mathrm{V}(u) = \lambda u$. Cela donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \lambda u_n$$

La suite u est donc géométrique et on peut écrire $u_n = \lambda^n u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. u étant non nulle, $u_0 \neq 0$ et $u \in \mathrm{H}$ indique que la série géométrique $\sum_{n\geqslant 0}|\lambda^2|^n$ converge c'est à dire que $\lambda \in]-1,1[$. Réciproquement, si $\lambda \in]-1,1[$, $u = (\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{H}$ et $\mathrm{V}(u) = \lambda u$. Comme $u \neq 0$ puisque $u_0 = 1$, on a $\lambda \in \sigma_p(\mathrm{V})$. Finalement, $\sigma_p(\mathrm{V}) =]-1,1[$.

8. La linéarité de S et V est toujours acquise. Si $u \in F$, on a, puisque $S(u)_0 = 0$:

$$\|S(u)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |S(u)_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |S(u)_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |u_{n-1}| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| = \|u\|_\infty$$

Ceci prouve que $S(u)$ est dans F si u est dans F et que $\|S(u)\|_\infty = \|u\|_\infty$ pour tout $u \in F$ de sorte que (1) est vérifiée avec $M = 1$ (c'est même une égalité). En travaillant de même sur V, on prouve que c'est également un opérateur de F avec $\|V(u)\|_\infty \leqslant \|u\|_\infty$ pour tout $u \in F$.

9. Le même raisonnement qu'à la question **7** montre que l'on a toujours $\sigma_p(S) = \emptyset$ (la norme sur H n'a pas servi dans la preuve).

Si $\lambda \in \sigma_p(V)$, il existe $u \in F$ non nul tel que $V(u) = \lambda u$. Cela donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \lambda u_n$$

La suite u est donc géométrique et on peut écrire $u_n = \lambda^n u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. u étant non nulle, $u_0 \neq 0$, et $u \in F$ indique que $\lambda \in [-1,1]$. Réciproquement, si $\lambda \in [-1,1]$, $u = (\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ et $V(u) = \lambda u$. Comme $u \neq 0$ puisque $u_0 = 1$, on a donc $\lambda \in \sigma_p(V)$. Finalement, $\sigma_p(V) = [-1,1]$.

10. L'application S n'est pas bijective puisque tout élément de l'image de S a un premier terme nul et la suite constante égale à 1, qui est bien dans F, n'a donc pas d'antécédent par S. Ainsi $0 \in \sigma(S)$.

Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On se donne $u \in F$ et on pose $v = (S - \lambda \mathrm{I}d_F)(u)$. On a :

$$u_0 = -v_0/\lambda \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = u_{n-1} - \lambda u_n$$

ce qui donne aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda^{n-1} v_n = \lambda^{n-1} u_{n-1} - \lambda^n u_n$$

En sommant, les termes se télescopent et on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda^{k-1} v_k = u_0 - \lambda^n u_n$$

et avec $u_0 = -v_0/\lambda$ on a finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{1}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n} \lambda^{k-1} v_k \tag{$*$}$$

Supposons que $S - \lambda \mathrm{I}d_F$ soit bijective de F dans F. La suite constante égale à 1 admet donc un antécédent donné par le calcul précédent. Cet antécédent étant dans F,

$$u_n = -\frac{1}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n} \lambda^{k-1}$$

est le terme général d'une suite bornée. Ceci implique que $\lambda \neq 1$ puisque sinon $u_n = -n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que, par calcul de la somme géométrique de raison $\lambda \neq 1$:

$$u_n = \frac{1}{1-\lambda}\left(1 - \frac{1}{\lambda^{n+1}}\right)$$

est le terme général d'une suite bornée c'est-à-dire $|\lambda| \geqslant 1$. En utilisant de même la suite $v = ((-1)^k)_{k\in\mathbb{N}}$, on voit qu'il faut que $\lambda \neq -1$. La bijectivité de $S - \lambda \mathrm{I}d_F$ entraîne donc $|\lambda| > 1$. Réciproquement, supposons $|\lambda| > 1$. Soit $v \in F$ et u définie par les relations $(*)$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n| \leqslant \frac{\|v\|_\infty}{|\lambda|^n} \sum_{k=0}^{n} |\lambda|^{k-1} = \frac{\|v\|_\infty}{|\lambda| - 1}\left(1 - \frac{1}{|\lambda|^{n+1}}\right) \leqslant \frac{\|v\|_\infty}{|\lambda| - 1}$$

Ainsi u est bornée et donc dans F et vérifie $(S - \lambda \mathrm{I}d_F)(u) = v$, ce qui montre que $S - \lambda \mathrm{I}d_F$ est surjective de F dans F. Comme elle est aussi injective par la question **9**, elle est donc bijective. On a finalement montré que $S - \lambda \mathrm{I}d_F$ est bijective ssi $|\lambda| > 1$ ou encore que $\sigma(S) = [-1,1]$.

Si $|\lambda| \leqslant 1$ alors $V - \lambda \mathrm{I}d_F$ n'est pas injective par la question **9** et donc non bijective. Réciproquement, supposons $|\lambda| > 1$ et considérons $v \in F$. Un calcul similaire à celui mené plus haut montre que si $(V - \lambda\, \mathrm{id}_F)(u) = v$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda^n \left(u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_k}{\lambda^{k+1}}\right)$$

Comme v est bornée et $|\lambda| > 1$, la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n/\lambda^{n+1}$ converge absolument par comparaison. On introduit donc la suite u définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda^n \left(-\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{v_k}{\lambda^{k+1}} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_k}{\lambda^{k+1}} \right) = -\lambda^n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{v_k}{\lambda^{k+1}}$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant |\lambda^n| \|v\|_\infty \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda|^{k+1}} = \frac{\|v\|_\infty}{|\lambda| - 1}$$

Ainsi u est bornée et donc dans F. De plus, elle vérifie $(\mathrm{V} - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{F})(u) = v$. On a donc $\mathrm{V} - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{F}$ surjective de F dans F. Étant injective par la question **9**, elle est donc bijective. On a ainsi prouvé que $\sigma(\mathrm{V}) = [-1, 1]$.