DEVOIR SURVEILLÉ n°2

Samedi 1er octobre 2022

Durée : 4h00

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Le sujet comporte trois exercices indépendants.

Exercice 1 – Étude de quelques séries

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels. On définit alors :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad b_n = n(a_n - a_{n+1}),\qquad \mathrm{A}_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B}_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

1. Dans cette question, on suppose que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$$

1.1. Vérifier que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge et calculer sa somme.

1.2. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge et calculer sa somme.

Pour le calcul de la somme, on pourra remarquer que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \sum_{k=1}^{n} kx^k = x\mathrm{S}_n'(x) \qquad \text{où} \qquad \mathrm{S}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$$

2. Dans cette question, on suppose que :

$$a_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n\geqslant 2,\quad a_n = \frac{1}{n\ln n}$$

2.1. Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(a_n)_{n\geqslant 2}$.

2.2. Donner la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$.

2.3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (na_n)$.

2.4. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$.

3. Dans cette question, on suppose que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.

3.1. Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = \sum_{p=n+1}^{2n} a_p$$

Montrer que $na_{2n} \leqslant u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

3.2. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} na_{2n} = 0$.

3.3. Démontrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$.

3.4. Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{B}_n = \mathrm{A}_n - (n+1)\,a_{n+1} + a_{n+1}$$

3.5. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge.

3.6. Étudier si l'égalité suivante est vérifiée :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

4. Dans cette question, on suppose que la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et de limite nulle.

4.1. Vérifier que $\mathrm{B}_n \geqslant \mathrm{A}_m - m a_{n+1}$ pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m \leqslant n$.

4.2. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

4.3. Peut-on en déduire l'égalité suivante ?

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

Exercice 2 – Étude d'un reste de série convergente

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\mathrm{R}_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p}$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier que la série définissant R_n est bien convergente.

2. On cherche à obtenir une nouvelle expression de R_n pour $n \in \mathbb{N}$.

2.1. Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \mathrm{N} \geqslant n, \quad \sum_{p=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^p}{p} = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \; + \; (-1)^{\mathrm{N}} \int_0^1 \frac{x^{\mathrm{N}}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

On pourra remarquer en le démontrant que :

$$\forall p \geqslant 1, \quad \frac{1}{p} = \int_0^1 x^{p-1}\,\mathrm{d}x$$

2.2. Établir que :

$$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \quad \left| (-1)^{\mathrm{N}} \int_0^1 \frac{x^{\mathrm{N}}}{1+x}\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{1}{\mathrm{N}+1}$$

2.3. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{R}_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

3. On cherche à étudier la série de terme général R_n.

3.1. Justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{R}_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$$

3.2. Prouver que :

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x \; = \; \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

3.3. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{R}_n$.

3.4. Déterminer la somme de la série.

Exercice 3 – Sous-espaces cycliques d'un endomorphisme

Partie I

Dans cette partie, on travaille dans le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ dont on note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique.
On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -16 & 7 & -4 \\ 9 & -3 & -4 & -7 \\ 7 & -4 & -7 & -16 \\ -4 & -7 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est A.

1. **1.1.** Calculer $f(e_1)$ et $f^2(e_1)$.
   1.2. Montrer que la famille $\big(e_1, f(e_1), f^2(e_1)\big)$ est liée.
2. Montrer de même que la famille $\big(e_2, f(e_2), f^2(e_2)\big)$ est liée.
3. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \big(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2)\big)$ forme une base de $\mathbb{R}^4$.
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, $f^2(x) + 10f(x) + 100x = 0$.
5. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Partie II

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$ et on considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^d$. Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^d$.
On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = f^n(x)$$

où f^n désigne la composée $n-$ème de f.

6. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ le plus grand entier tel que $(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1})$ soit une famille libre.

   6.1. Justifier l'existence d'un tel entier p.
   On pourra montrer que l'ensemble $\big\{k \in \mathbb{N}^*,\ (x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})$ *est libre*$\big\}$ *est non vide et majoré.*

   6.2. Montrer qu'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ tels que :

   $$x_p = \sum_{i=0}^{p-1} a_i x_i$$

   6.3. On note $E_x = \mathrm{Vect}(x_0, \ldots, x_{p-1})$. Montrer que E_x est stable par f.

   6.4. Justifier que la famille $\mathcal{B}_p = (x_0, \ldots, x_{p-1})$ est une base de E_x.

7. On note $\widehat{f}$ l'endomorphisme induit par f sur E_x. On a donc $\widehat{f} \in \mathcal{L}(E_x)$.
   Donner la matrice de $\widehat{f}$ dans la base $\mathcal{B}_p$.
8. Montrer que la famille $(\mathrm{Id}, \widehat{f}, \widehat{f}^2, \ldots, \widehat{f}^{p-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E_x)$.
9. **9.1.** Montrer que pour tout $k < p$, on a :

   $$\widehat{f}^p(x_k) = a_0 x_k + a_1 \widehat{f}(x_k) + \cdots + a_{p-1}\widehat{f}^{p-1}(x_k)$$

   9.2. En déduire que l'on a :

   $$\widehat{f}^p - a_{p-1}\widehat{f}^{p-1} - \cdots - a_0\,\mathrm{Id} = 0$$

Partie III

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et f un endomorphisme de E. On note $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ les valeurs propres réelles deux à deux distinctes de f et $(\mathrm{E}_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ les sous-espaces propres associés. On suppose que :

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}_p$$

10. Soit $x \in \mathrm{E}$.

10.1. Montrer qu'il existe des vecteurs $x_i \in \mathrm{E}_i$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{p} x_i$$

Cette décomposition est-elle unique ?

10.2. Notons q le nombre de vecteurs x_i non nuls dans la décomposition précédente et supposons pour simplifier que ce sont les q premiers. Montrer que $(x_1, \ldots, x_q)$ forme une famille libre.

10.3. Exprimer $f^k(x)$ pour $1 \leqslant k \leqslant q-1$ en fonction des $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$.

10.4. Supposons qu'il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ tels que :

$$\alpha_1 x + \alpha_2 f(x) + \cdots + \alpha_q f^{q-1}(x) = 0$$

Montrer que le polynôme :

$$\mathrm{P(X)} = \alpha_1 + \alpha_2 \mathrm{X} + \cdots + \alpha_q \mathrm{X}^{q-1}$$

admet $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ comme racines.

10.5. En déduire que la famille $\left(x, f(x), \ldots, f^{q-1}(x)\right)$ est libre.

10.6. On pose $\mathrm{H} = \mathrm{Vect}\left(x, f(x), \ldots, f^{q-1}(x)\right)$. Montrer que $\mathrm{H} = \mathrm{Vect}\left(x_1, \ldots, x_q\right)$.
On pourra utiliser les polynômes d'interpolation de Lagrange.

11. Soit F un sous-espace stable par f. On note $\mathrm{F}_i = \mathrm{F} \cap \mathrm{E}_i$. Soit $x \in \mathrm{F}$. On décompose x comme précédemment

$$x = \sum_{i=1}^{p} x_i$$

avec $x_i \in \mathrm{E}_i$.

Déduire de la question précédente que $x_i \in \mathrm{F}_i$.

12. On suppose ici que $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ et que la matrice de f dans la base canonique est donnée par :

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

12.1. Déterminer les sous-espaces propres de f.

12.2. Déterminer les sous-espaces stables par f.

⋆ ⋆
⋆