DEVOIR SURVEILLÉ N°2

CORRIGÉ

EXERCICE 1 – ÉTUDE DE QUELQUES SÉRIES

1. **1.1.** La série étudiée est géométrique de raison $1/2 \in]-1,1[$ et elle est donc convergente. De plus, par le cours et avec un changement de variable $\ell = n-1$, sa somme est donnée par :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{2^\ell} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

1.2. On commence par calculer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = n\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{n}{2^n}$$

On remarque que $(n^2 b_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0 par croissance comparée de sorte que la série de terme général b_n converge par comparaison avec une série de Riemann convergente.

Il reste à calculer la somme. Avec les notations introduites par l'énoncé, par sommation des premiers termes d'une suite géométrique, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{S}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction S_n est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \quad \mathrm{S}_n'(x) = \frac{1-nx^{n-1}+(n-1)x^n}{(1-x)^2}$$

On en déduit alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} kx^k = x\mathrm{S}_n'(x) = \frac{x-nx^n+(n-1)x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

Supposons $x \in]-1,1[$. On a alors $(nx^n)_{n\geqslant 1}$ et $((n-1)x^{n+1})_{n\geqslant 1}$ qui tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ par croissance comparée. On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Avec $x = 1/2$, il vient alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2$$

2. **2.1.** La suite $(n\ln n)_{n\geqslant 2}$ est clairement croissante et divergente vers $+\infty$. Ainsi, en passant à l'inverse, la suite $(a_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante et convergente vers 0.

2.2. On commence par poser :

$$\forall t > 1, \quad f(t) = \frac{1}{t\ln t}$$

La fonction f étant décroissante et continue sur $]1,+\infty[$, on peut utiliser une comparaison série–intégrale :

$$\forall k \geqslant 2, \quad \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) = a_k$$

En sommant, et comme $a_1 = 0$, la relation de Chasles donne :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \int_2^{n+1} f(t)\ \mathrm{d}t \ \leqslant\ \mathrm{A}_n$$

Une primitive de f sur $]1,+\infty[$ est $t \mapsto \ln(\ln(t))$ et on a donc :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \ \leqslant\ \mathrm{A}_n$$

Le minorant étant divergent vers $+\infty$, on en déduit par comparaison que la suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est elle aussi divergente vers $+\infty$. Ainsi la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ diverge.

2.3. On a directement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n a_n = \frac{1}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

2.4. On observe que :

$$\forall n \geqslant 2, \quad b_n = \frac{1}{\ln n} - \frac{n}{(n+1)\ln(n+1)} = \frac{1}{\ln n} - \frac{n+1-1}{(n+1)\ln(n+1)} = \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)} + a_{n+1}$$

En sommant de 1 à $n \geqslant 2$, par téléscopage et en utilisant $b_1 = -a_2$ et $a_1 = 0$, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{B}_n = b_1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)}\right) + \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)} + \mathrm{A}_{n+1} - a_2$$

Enfin, la suite $(1/\ln 2 - 1/\ln(n+1) - 2a_2)_{n\geqslant 1}$ est clairement convergente tandis que la suite $(\mathrm{A}_{n+1})_{n\geqslant 1}$ ne l'est pas puisque la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ diverge. En conclusion, la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente et la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ diverge.

3. 3.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans la somme définissant u_n, il y a n termes. Par décroissance de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, le plus petit d'entre eux est a_{2n}. On a donc directement $n a_{2n} \leqslant u_n$.

3.2. On a $u_n = \mathrm{A}_{2n} - \mathrm{A}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge par hypothèse, la suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. Par extraction, il en est de même de la suite $(\mathrm{A}_{2n})_{n\geqslant 1}$ et vers la même limite. Cela montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0. Enfin, puisque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à termes positifs par hypothèse, la question précédente donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant n a_{2n} \leqslant u_n$$

de sorte que l'on obtient le résultat par théorème d'encadrement.

3.3. Posons $c_n = n a_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Avec la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad c_{2n} = 2(n a_{2n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Nous allons prouver que la suite $(c_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge également vers 0, ce qui permettra de conclure par résultat de cours sur les suites extraites. Par positivité et décroissante de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant c_{2n+1} = (2n+1)a_{2n+1} \leqslant (2n+1)a_{2n} = c_{2n} + a_{2n+1}$$

Comme la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et il en est donc de même de la suite extraite $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$. De plus la suite $(c_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de limite nulle par ce qui précède. Ainsi, le majorant ci-dessus est de limite nulle et, par théorème d'encadrement, la suite $(c_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, ce que l'on voulait.

3.4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_n &= \sum_{k=1}^{n} k a_k - \sum_{k=1}^{n} k a_{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k a_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) a_k \\
&= a_1 + \sum_{k=2}^{n} (k-(k-1)) a_k - n a_{n+1} \\
&= \mathrm{A}_n - (n+1) a_{n+1} + a_{n+1}
\end{aligned}$$

3.5. Dans le terme de droite de l'égalité prouvée à la question précédente, il faut voir que chacun des termes admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$. En effet, le terme A_n converge puisque la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ est supposée convergente, le terme $(n+1)a_{n+1}$ converge vers 0 par **3.3** et le terme a_{n+1} converge vers 0 puisque la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge. Cela permet d'affirmer que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et donc que la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge.

3.6. Avec les arguments avancés dans la question précédente, un passage à la limite dans l'identité de la question **3.4** donne :

$$\lim_{n\to+\infty} B_n = \lim_{n\to+\infty} A_n \qquad \text{soit} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

4. **4.1.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \leqslant n$. Reprenons l'identité de la question **3.4.** :

$$B_n = A_n - na_{n+1} = A_m + \sum_{k=m+1}^{n} a_k - na_{n+1}$$

Par décroissance de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, dans la somme, il y a $n-m$ termes tous plus grand que a_n et donc aussi que a_{n+1}. On en déduit que :

$$B_n \geqslant A_m + (n-m)a_{n+1} - na_{n+1} = A_m - ma_{n+1}$$

4.2. Fixons $m \in \mathbb{N}^*$ et faisons tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente. La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ par convergence de cette dernière et la suite $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de limite nulle par hypothèse. Ainsi il vient :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \geqslant A_m$$

Ceci montre que la suite $(A_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est une suite bornée. Comme elle est également croissante puisque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à termes positifs, elle converge. Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

4.3. Maintenant que l'on sait que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge, les hypothèses de la question **3** sont vérifiées et on peut donc prouver de la même façon que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

Exercice 2 – Étude d'un reste de série convergente

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La suite $(|(-1)^p/p|)_{p\geqslant n+1} = (1/p)_{p\geqslant n+1}$ est décroissante et de limite nulle de sorte que la série définissant R_n est convergente d'après le théorème spécial des séries alternées.

2. **2.1.** On fixe $n \in \mathbb{N}$ et $N \geqslant n$. On commence par remarquer que :

$$\forall p \geqslant 1, \quad \int_0^1 x^{p-1}\,dx = \left[\frac{x^p}{p}\right]_0^1 = \frac{1}{p}$$

En utilisant cette égalité, il vient :

$$\begin{aligned}\sum_{p=n+1}^{N} \frac{(-1)^p}{p} &= \sum_{p=n+1}^{N} (-1)^p \int_0^1 x^{p-1}\,dx \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{p=n+1}^{N} (-1)^p x^{p-1}\right) dx \\ &= -\int_0^1 \left(\sum_{p=n+1}^{N} (-x)^{p-1}\right) dx\end{aligned}$$

Par sommation des premiers termes d'une suite géométrique de raison $-x \neq 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{p=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^p}{p} &= -\int_0^1 (-x)^n \frac{1-(-x)^{\mathrm{N}-n}}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 \frac{(-1)^n x^n - (-1)^{\mathrm{N}} x^{\mathrm{N}}}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \;+\; (-1)^{\mathrm{N}}\int_0^1 \frac{x^{\mathrm{N}}}{1+x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

2.2. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$. Par positivité de l'intégrale, on a :

$$\int_0^1 \underbrace{\frac{x^{\mathrm{N}}}{1+x}}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

Ainsi, en utilisant le fait que $1+x \geqslant 1$ pour $x \in [0,1]$, on obtient :

$$\left|(-1)^{\mathrm{N}}\int_0^1 \frac{x^{\mathrm{N}}}{1+x}\,\mathrm{d}x\right| = \int_0^1 \frac{x^{\mathrm{N}}}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{\mathrm{N}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{N}+1}$$

2.3. Avec **2.1**, on a obtenu que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \mathrm{N} \geqslant n, \quad \sum_{p=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^p}{p} = (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \;+\; \underbrace{(-1)^{\mathrm{N}}\int_0^1 \frac{x^{\mathrm{N}}}{1+x}\,\mathrm{d}x}_{=u_{\mathrm{N}}}$$

Par comparaison, la question **2.2** assure que u_{N} tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$. Ainsi, en fixant $n \in \mathbb{N}$ et en faisant tendre N vers $+\infty$ dans la relation précédente, il vient :

$$\mathrm{R}_n = (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

3. 3.1. On fixe $n \in \mathbb{N}$. On intègre par parties en intégrant $x \mapsto x^n$ pour obtenir :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)}\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

D'où le résultat après multiplication par $(-1)^{n+1}$.

3.2. De façon similaire à **2.2**, on obtient :

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

D'où le résultat.

3.3. Avec les questions **3.1** et **3.2**, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{R}_n = \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)}}_{a_n} + \underbrace{\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{b_n}$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ est convergente en vertu du théorème spécial des séries alternées puisque la valeur absolue de son terme général est décroissante et de limite nulle. La série $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ est convergente par théorème de comparaison avec une série de Riemann convergente. Par somme, la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{R}_n$ est convergente.

3.4. On reprend l'expression de **2.3** pour écrire :

$$\begin{aligned}
\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{R}_n &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} (-x)^n\right) \frac{\mathrm{d}x}{1+x} \\
&= -\int_0^1 \left(\frac{1-x^{\mathrm{N}+1}}{1+x}\right) \frac{\mathrm{d}x}{1+x} \\
&= -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2} + \underbrace{\int_0^1 \frac{x^{\mathrm{N}+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x}_{u_{\mathrm{N}}}
\end{aligned}$$

On peut prouver de la même façon qu'en **2.2** que u_{N} tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$ de sorte qu'en passant à la limite lorsque N tend vers $+\infty$ dans la relation précédente, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{R}_n = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2} = -\left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}$$

Exercice 3 – Sous-espaces cycliques d'un endomorphisme

Partie I

1. 1.1. Le vecteur $f(e_1)$ a pour coordonnées dans la base canonique la première colonne de A, ce qui donne directement $f(e_1) = (-7, 9, 7, -4)$. Dès lors, $f^2(e_1)$ a pour coordonnées dans la base canonique :

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ -90 \\ -70 \\ 40 \end{pmatrix}$$

donc $f^2(e_1) = (-30, -90, -70, 40)$.

1.2. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\alpha e_1 + \beta f(e_1) + \gamma f^2(e_1) = (0,0,0,0) \iff \left\{\begin{aligned} \alpha - 7\beta - 30\gamma &= 0 \\ 9\beta - 90\gamma &= 0 \\ 7\beta - 70\gamma &= 0 \\ -4\beta + 40\gamma &= 0 \end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} \alpha &= 100\gamma \\ \beta &= 10\gamma \end{aligned}\right.$$

Ainsi (en choisissant $\gamma = 1$), $100e_1 + 10f(e_1) + f(e_2) = (0,0,0,0)$ est une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls de $e_1, f(e_1), f^2(e_1)$ et la famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est donc liée.

2. De même qu'en **1.1**, on obtient $f(e_2) = (-16, -3, -4, -7)$ et $f^2(e_2) = (160, -70, 40, 70)$. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\alpha e_2 + \beta f(e_2) + \gamma f^2(e_2) = (0,0,0,0) \iff \left\{\begin{aligned} -16\beta + 160\gamma &= 0 \\ \alpha - 3\beta - 70\gamma &= 0 \\ -4\beta + 40\gamma &= 0 \\ -7\beta + 70\gamma &= 0 \end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} \alpha &= 100\gamma \\ \beta &= 10\gamma \end{aligned}\right.$$

Ainsi $100e_2 + 10f(e_2) + f(e_2) = (0,0,0,0)$ est une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls de e_2, $f(e_2)$, $f^2(e_2)$ et la famille $(e_2, f(e_2), f^2(e_2))$ est donc liée.

3. Pour montrer que la famille $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ forme une base de $\mathbb{R}^4$, on calcule le déterminant de cette famille dans la base canonique. En développant par rapport à la première colonne :

$$\det_{\mathscr{B}_c}(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2)) = \begin{vmatrix} 1 & -7 & 0 & -16 \\ 0 & 9 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & -7 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la deuxième colonne, on obtient alors :

$$\det_{\mathscr{B}_c}(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2)) = -\begin{vmatrix} 7 & -4 \\ -4 & -7 \end{vmatrix} = 65 \neq 0$$

Donc $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ forme une base de $\mathbb{R}^4$.

4. D'après **2.** et **3.**, on a :

$$f^2(e_1) + 10f(e_1) + 100e_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad f^2(e_2) + 10f(e_2) + 100e_2 = 0$$

En composant ces égalités par f, on obtient :

$$f^2(f(e_1)) + 10f(f(e_1)) + 100f(e_1) = 0 \qquad \text{et} \qquad f^2(f(e_2)) + 10f(f(e_2)) + 100f(e_2) = 0$$

Ainsi, l'égalité $f^2(x) + 10f(x) + 100x = 0$ est vraie pour $x = e_1$, $x = f(e_1)$, $x = e_2$ et $x = f(e_2)$. Mais $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ étant une base de $\mathbb{R}^4$, pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, on peut décomposer x sous la forme $x = x_1e_1 + x_2f(e_1) + x_3e_2 + x_4f(e_2)$ et on a alors, par linéarité de f et f^2 :

$$\begin{aligned} f^2(x) + 10f(x) + 100x &= x_1(f^2(e_1) + 10f(e_1) + 100e_1) + x_2(f^2(f(e_1)) + 10f(f(e_1)) + 100f(e_1)) \\ &\quad + x_3(f^2(e_2) + 10f(e_2) + 100e_2) + x_4(f^2(f(e_2)) + 10f(f(e_2)) + 100f(e_2)) = 0 \end{aligned}$$

5. Grâce aux calculs menés dans les questions **1** et **2**, la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -100 & 0 & 0 \\ 1 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{pmatrix}$$

Partie II

6. **6.1.** On introduit $\Gamma = \{k \in \mathbb{N}^*,\ (x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}) \text{ est libre}\}$ qui est une partie de $\mathbb{N}$. Comme $\mathbb{R}^d$ est de dimension d, toute famille de $\mathbb{R}^d$ ayant un nombre de vecteurs strictement supérieur à d est liée. Donc Γ est une partie de $\mathbb{N}$, majorée par d. Elle contient 1 car $(x_0) = (x)$ est libre puisque $x \neq 0$. Ainsi Γ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ et admet donc un plus grand élément, que l'on notera p.

6.2. Par définition de p, la famille $(x_0, x_1, \ldots, x_p)$ est liée. Donc il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^d \setminus (0, 0, \ldots, 0)$ tels que $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{p-1}x_{p-1} + \lambda_p x_p = 0$. Supposons par l'absurde que $\lambda_p = 0$, alors on aurait la relation $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{p-1}x_{p-1} = 0$ et comme la famille $(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1})$ est libre, on obtiendrait la nullité de tous les λ_i, ce qui est absurde. Ainsi $\lambda_p \neq 0$ et :

$$x_p = -\sum_{k=0}^{p-1} \frac{\lambda_k}{\lambda_p} x_k = \sum_{k=0}^{p-1} a_k x_k$$

où l'on a posé $a_k = -\lambda_k/\lambda_p$ pour $k \in [\![0, p-1]\!]$. D'où le résultat.

6.3. Soit $y \in \mathrm{E}_x$. Par définition de E_x, il existe $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tels que :

$$y = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k x_k$$

On obtient alors par linéarité de f et définition des $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$f(y) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f(x_k) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k x_{k+1} = \underbrace{\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_{k-1} x_k}_{u} + \lambda_{p-1} x_p$$

Or, par définition, $u \in \mathrm{E}_x$ et d'après la question précédente, $x_p \in \mathrm{E}_x$. Cet ensemble E_x étant un espace vectoriel, $f(y) = u + \lambda_{p-1}x_p \in \mathrm{E}_x$ de sorte que E_x est stable par f.

6.4. Par définition de E_x, la famille $(x_0, \ldots, x_{p-1})$ est génératrice de E_x. Étant donné qu'elle est libre par définition de l'entier p, elle forme bien une base de E_x.

7. Pour $k \in [\![0, p-2]\!]$, on a $f(x_k) = x_{k+1}$ et on a aussi $f(x_{p-1}) = x_p = a_0 x_0 + \cdots + a_{p-1} x_{p-1}$ d'après la question **6.2**. Ainsi la matrice cherchée est :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{p-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix}$$

8. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tels que $\lambda_0 \operatorname{Id} + \lambda_1 \widehat{f} + \lambda_2 \widehat{f}^2 + \ldots. + \lambda_{p-1} \widehat{f}^{p-1} = 0$. On applique cette égalité à x, qui est un élément de E_x. On obtient :

$$\lambda_0 x + \lambda_1 \widehat{f}(x) + \lambda_2 \widehat{f}^2 + \ldots. + \lambda_{p-1} \widehat{f}^{p-1}(x) = 0 \qquad \text{soit} \qquad \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots. + \lambda_{p-1} x_{p-1} = 0$$

Or $(x_0, \ldots, x_{p-1})$ est une famille libre donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{p-1} = 0$, ce qui prouve que la famille $(\operatorname{Id}, \widehat{f}, \widehat{f}^2, \ldots., \widehat{f}^{p-1})$ est une famille libre de $\mathscr{L}(\mathrm{E}_x)$.

9. **9.1.** La relation demandée est vraie pour $k = 0$ car, d'après la définition des réels $a_0, \ldots, a_{p-1}$, on a :

$$\widehat{f}^p(x_0) = x_p = a_0 x_0 + \ldots + a_{p-1} x_{p-1} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \widehat{f}^i(x_0)$$

Ensuite, pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, on applique $\widehat{f}^k$ aux deux membres de cette égalité, et on obtient la relation demandée, car pour tout entier i, $\widehat{f}^k(\widehat{f}^i(x_0)) = \widehat{f}^i(\widehat{f}^k(x_0)) = \widehat{f}^i(x_k)$.

9.2. Notons g l'endomorphisme de E_x défini par $g = \widehat{f}^p - a_{p-1} \widehat{f}^{p-1} - \ldots - a_0 \operatorname{Id}$. D'après la question précédente, on a $g(x_k) = 0$ pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, donc g est nul sur tous les vecteurs de la base $\mathscr{B}_p$ de E_x, et par conséquent g est l'endomorphisme nul, comme voulu.

Partie III

10. **10.1.** Le fait que $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 + \cdots + \mathrm{E}_p$ assure l'existence des vecteurs $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et le fait que la somme soit directe assure leur unicité.

10.2. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_q) \in \mathbb{R}^q$ tel que $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_q x_q = 0$. On remarque que pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, $\lambda_i x_i \in \mathrm{E}_i$. Puisque la somme $\mathrm{E}_1 + \ldots + \mathrm{E}_p$ est directe, on obtient $\lambda_i x_i = 0_\mathrm{E}$ pour tout $i \in [\![1, q]\!]$. Mais comme les $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ sont tous non nuls, on obtient $\lambda_1 = \cdots = \lambda_q = 0$. Ainsi, $(x_1, \ldots, x_q)$ forme une famille libre.

10.3. On a $x = x_1 + \cdots + x_q$. Pour $i \in [\![1, q]\!]$, on a $x_i \in \mathrm{E}_i$ donc x_i est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_i de sorte que l'on peut obtenir $f^k(x_i) = \lambda_i^k x_i$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Finalement, par linéarité de f^k, on trouve :

$$f^k(x) = \sum_{i=1}^{q} f^k(x_i) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i^k x_i$$

10.4. Supposons qu'il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ tels que :

$$\alpha_1 x + \alpha_2 f(x) + \cdots + \alpha_q f^{q-1}(x) = 0$$

. Grâce aux expressions de la question précédente, on obtient :

$$\alpha_1 \sum_{i=1}^{q} x_i + \alpha_2 \sum_{i=1}^{q} \lambda_i x_i + \cdots + \alpha_q \sum_{i=1}^{q} \lambda_i^{q-1} x_i = 0$$

On en déduit :

$$(\alpha_1 + \alpha_2 \lambda_1 + \cdots + \alpha_q \lambda_1^{q-1}) x_1 + (\alpha_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \cdots + \alpha_q \lambda_2^{q-1}) x_2 + \cdots + (\alpha_1 + \alpha_2 \lambda_q + \cdots + \alpha_q \lambda_q^{q-1}) x_q = 0$$

Ce qui peut s'écrire :

$$\mathrm{P}(\lambda_1) x_1 + \mathrm{P}(\lambda_2) x_2 + \cdots + \mathrm{P}(\lambda_q) x_q = 0$$

La famille $(x_1, \ldots, x_q)$ étant libre, on en déduit que $\mathrm{P}(\lambda_1) = \mathrm{P}(\lambda_2) = \cdots = \mathrm{P}(\lambda_q) = 0$, comme souhaité.

10.5. Soit $(\alpha_1,\dots,\alpha_q)\in\mathbb{R}^q$ tel que $\alpha_1 x+\alpha_2 f(x)+\cdots+\alpha_q f^{q-1}(x)=0$. Le polynôme $P(X)=\alpha_1+\alpha_2 X+\cdots+\alpha_q X^{q-1}$ est de degré inférieur ou égal à $q-1$ et d'après la question précédente, admet au moins q racines distinctes $\lambda_1,\dots,\lambda_q$. P est donc le polynôme nul et tous ses coefficients sont nuls. Ainsi $\alpha_1=\cdots=\alpha_q=0$ et la famille $(x,f(x),\dots,f^{q-1}(x))$ est libre.

10.6. D'après la question **10.3**, on a clairement $\left\{x,f(x),\dots,f^{q-1}(x)\right\}\subset \mathrm{Vect}\left(x_1,\dots,x_q\right)$, d'où l'on déduit ensuite $H\subset \mathrm{Vect}\left(x_1,\dots,x_q\right)$ par stabilité par combinaison linéaire. Nous allons prouver l'autre inclusion. Pour ce faire, par stabilité par combinaison linéaire, il suffit de montrer que $x_i\in H$ pour tout $i\in[\![1,q]\!]$. On fixe donc $i\in[\![1,q]\!]$. Soit $P(X)=\alpha_1+\alpha_2X+\cdots+\alpha_qX^{q-1}$ un polynôme de $\mathbb{R}_{q-1}[X]$. Les calculs de la question **10.4** donnent :

$$\alpha_1 x+\alpha_2 f(x)+\cdots+\alpha_q f^{q-1}(x)=P(\lambda_1)x_1+P(\lambda_2)x_2+\cdots+P(\lambda_q)x_q$$

En choisissant pour P le polynôme d'interpolation de Lagrange valant 0 en les $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant q,k\neq i}$ et 1 en λ_i, on obtient :

$$\alpha_1 x+\alpha_2 f(x)+\cdots+\alpha_q f^{q-1}(x)=x_i$$

où les $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ désignent les coefficients du polynôme d'interpolation de Lagrange choisi. On a bien prouvé que $x_i\in H$.

11. Si $x=0$, tous les x_i sont nuls et $x_i\in F_i$, qui est un sous-espace vectoriel de E. Sinon, d'après la question précédente, $x_i\in E_x$. Comme F contient x et que F est stable par f, on obtient $E_x\subset F$ et donc $x_i\in F$.

12. 12.1. On trouve $E_0=\mathrm{Vect}((1,-1,0))$, $E_1=\mathrm{Vect}((1,-1,-1))$ et $E_2=\mathrm{Vect}((0,1,1))$.

12.2. Cherchons ces sous-espaces d'après leurs dimensions.

- Le seul sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 0 (resp. de dimension 3) est $\{0\}$ (resp. $\mathbb{R}^3$) et il est stable par f.
- Un sous-espace vectoriel de dimension 1 (i.e. une droite) stable par f est nécessairement dirigé par un vecteur propre de f, et ces droites sont bien stables par f, ce qui nous donne les trois espaces propres E_0, E_1 et E_2.
- Il reste à déterminer les sous-espaces de dimension 2 (i.e. les plans) de $\mathbb{R}^3$ stables par f, et on note F un tel plan. Adaptons les notations de la question **11**, et poursuivons le raisonnement de cette question en montrant que :

$$F=F_0\oplus F_1\oplus F_2=(F\cap E_0)\oplus(F\cap E_1)\oplus(F\cap E_2).$$

  En effet, le résultat de la question **11** montre que tout vecteur x de F se décompose en $x=x_0+x_1+x_2$ avec $x_i\in F_i$, ce qui prouve que $F=F_0+F_1+F_2$. De plus, cette décomposition est unique puisqu'une telle décomposition est, en particulier, une décomposition de x suivant $E=E_0\oplus E_1\oplus E_2$, et que celle-ci est unique. Enfin, chaque F_i est de dimension 0 ou 1 (car inclus dans E_i) et $\dim(F)=2=\dim(F_0)+\dim(F_1)+\dim(F_2)$ donc l'un exactement des F_i est réduit à $\{0\}$, et les deux autres sont de dimension 1, donc égaux aux E_i correspondants. On a donc les trois possibilités suivantes : $F=E_0\oplus E_1$ ou $F=E_0\oplus E_2$ ou $F=E_1\oplus E_2$.
  Réciproquement, ces trois sous-espaces vectoriels de E sont manifestement stables par f.

En conclusion, les sous-espaces stables par f sont :

$$\{0\},E_0,E_1,E_2,E_0\oplus E_1,E_0\oplus E_2,E_1\oplus E_2 \text{ et } \mathbb{R}^3$$

⋆ ⋆
⋆