

SEMAINE DU 2 AU 7 DÉCEMBRE



## SÉRIES ENTIÈRES (COURS & EXERCICES)



*Le TD n'est pas encore très avancé, on se restreint à des exercices simples (calcul d'un rayon de convergence, calcul d'une somme de série entière, développement en série entière d'une fonction,...)*

- **Généralités** : définition des séries entières, lemme d'Abel, définition du rayon de convergence, convergence absolue sur le disque ou l'intervalle ouvert de convergence, méthodes pour déterminer un rayon de convergence, comparaison de rayons de convergence, opérations sur les séries entières : multiplication par un scalaire, somme et produit de Cauchy;
- **Régularité de la somme d'une série entière** : convergence normale sur tout segment de l'intervalle ouvert de convergence et continuité sur l'intervalle ouvert de convergence pour la variable réelle, continuité sur le disque ouvert de convergence pour la variable complexe, intégration et dérivation sur l'intervalle ouvert de convergence pour la variable réelle;
- **Développement en série entière** : fonction développable en série entière, série de Taylor, unicité du développement en série entière, développements en série entière usuels ( $\exp$ ,  $\operatorname{ch}$ ,  $\operatorname{sh}$ ,  $\cos$ ,  $\sin$ ,  $x \mapsto (1+x)^\alpha$ ,  $x \mapsto \ln(1+x)$  et  $\operatorname{Arctan}$ , séries géométrique et exponentielle pour la variable complexe, méthode de l'équation différentielle pour justifier qu'une fonction est développable en série entière et déterminer son développement.

**PREUVES EXIGIBLES** : (1) : lemme d'Abel, (2) : comportement d'une série entière pour  $|z| < R$  et  $|z| > R$ , (3) : comparaison de rayons de convergence, (4) : convergence normale de la somme de série entière sur tout segment de l'intervalle ouvert de convergence, (5) : continuité de la somme d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence, (6) : primitive de la somme d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.

## SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS (EXERCICES UNIQUEMENT)

- **Modes de convergence d'une suite de fonctions** : convergence simple, convergence uniforme, convergence uniforme implique convergence simple, lien entre convergence uniforme et convergence pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$  sur  $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ ;
- **Régularité de la limite d'une suite de fonctions** : continuité de la limite, théorème de la double limite, intégration d'une limite, dérivation d'une limite, dérivation d'ordre supérieur d'une limite;
- **Modes de convergence d'une série de fonctions** : convergence simple, convergence uniforme, convergence uniforme si et seulement si convergence simple et convergence uniforme de la suite des restes de la série de fonctions vers 0, convergence normale, convergence normale implique convergence uniforme;
- **Régularité de la somme d'une série de fonctions** : continuité de la somme, théorème de la double limite, intégration d'une somme, dérivation d'une somme, dérivation d'ordre supérieur d'une somme.