PROGRAMME DE COLLES

Semaine du 9 au 14 décembre

Intégration (Cours & éventuellement une étude d'intégrale)

⚠ **Pas encore de question de cours sur les deux derniers points : « Suites et séries de fonctions intégrables » et « Intégrales à paramètre ».**

On pourra donner un exercice simple portant sur l'étude de la nature d'une intégrale généralisée.

- **Intégration d'une fonction continue par morceaux sur un segment** : fonction continue par morceaux, opérations sur les fonctions continues par morceaux, intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment, propriétés de l'intégrale (linéarité, inégalité triangulaire, positivité, croissance, nullité), intégrale d'une fonction continue par morceaux à valeurs complexes ;
- **Intégrales généralisées** : Intégrale généralisée sur un intervalle semi-ouvert, intégrales de référence (intégrales de Riemann $\int_0^1 t^{-\alpha}\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\mathrm{d}t$, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ et $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$), intégrale généralisée sur un intervalle ouvert, intégrales faussement impropres, propriétés des intégrales généralisées (linéarité, inégalité triangulaire, positivité, croissance, nullité), intégrale généralisée d'une fonction à valeurs complexes, crochet généralisé, changement de variable, intégrales de Riemann $\int_a^b (t-a)^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b (b-t)^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$, convergence absolue, convergence absolue implique convergence, intégrabilité, théorème de comparaison, espaces des fonctions intégrables et de carré intégrables, inégalité de Cauchy-Schwarz ;
- **Suites et séries de fonctions intégrables** : théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions, théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions ;
- **Intégrales à paramètre** : théorèmes de continuité, de convergence dominée pour le cas continu, de dérivabilité et de classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre.

Preuves exigibles : *(1) : étude des intégrales de référence, (2) : crochet généralisé, (3) : intégration par parties généralisée, (4) : théorème de comparaison pour les fonctions intégrables, (5) - convergence absolue implique convergence, (6) : le produit de deux fonctions* L^2 *est* L^1.

Séries entières (Cours & Exercices)

- **Généralités** : définition des séries entières, lemme d'Abel, définition du rayon de convergence, convergence absolue sur le disque ou l'intervalle ouvert de convergence, méthodes pour déterminer un rayon de convergence, comparaison de rayons de convergence, opérations sur les séries entières : multiplication par un scalaire, somme et produit de Cauchy ;
- **Régularité de la somme d'une série entière** : convergence normale sur tout segment de l'intervalle ouvert de convergence et continuité sur l'intervalle ouvert de convergence pour la variable réelle, continuité sur le disque ouvert de convergence pour la variable complexe, intégration et dérivation sur l'intervalle ouvert de convergence pour la variable réelle ;
- **Développement en série entière** : fonction développable en série entière, série de Taylor, unicité du développement en série entière, développements en série entière usuels (exp, ch, sh, cos, sin, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $x \mapsto \ln(1+x)$ et Arctan, séries géométrique et exponentielle pour la variable complexe, méthode de l'équation différentielle pour justifier qu'une fonction est développable en série entière et déterminer son développement.

Preuves exigibles : *(1) : lemme d'Abel, (2) : comportement d'une série entière pour* $|z| < \mathrm{R}$ *et* $|z| > \mathrm{R}$, *(3) : comparaison de rayons de convergence, (4) : convergence normale de la somme de série entière sur tout segment de l'intervalle ouvert de convergence, (5) : continuité de la somme d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence, (6) : primitive de la somme d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.*