PROGRAMME DE COLLES

Semaine du 5 au 10 décembre

Séries entières (Cours et exercices de base)

Sur ce chapitre, nous n'avons abordé que les exercices du cours et les premiers exercices du TD ; on propose donc pour le moment des exercices de base (calcul d'un rayon de convergence, calcul de la somme d'une série entière...)

- **Généralités** : définition des séries entières, lemme d'Abel, définition du rayon de convergence, convergence absolue sur le disque ou l'intervalle ouvert de convergence, méthodes pour déterminer un rayon de convergence, comparaison de rayons de convergence, opérations sur les séries entières : multiplication par un scalaire, somme et produit de Cauchy ;
- **Régularité de la somme d'une série entière** : convergence normale sur tout segment de l'intervalle ouvert de convergence et continuité sur l'intervalle ouvert de convergence pour la variable réelle, continuité sur le disque ouvert de convergence pour la variable complexe, intégration et dérivation sur l'intervalle ouvert de convergence pour la variable réelle ;
- **Développement en série entière** : fonction développable en série entière, série de Taylor, unicité du développement en série entière, développements en série entière usuels (exp, ch, sh, cos, sin, $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$, $x \mapsto \ln(1+x)$ et Arctan, séries géométrique et exponentielle pour la variable complexe, méthode de l'équation différentielle pour justifier qu'une fonction est développable en série entière et déterminer son développement.

Preuves exigibles : *(1) : lemme d'Abel, (2) : comportement d'une série entière pour $|z| < \mathrm{R}$ et $|z| > \mathrm{R}$, (3) : comparaison de rayons de convergence, (4) : convergence normale de la somme de série entière sur tout segment de l'intervalle ouvert de convergence, (5) : continuité de la somme d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence, (6) : primitive de la somme d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.*

Suites et séries de fonctions (Cours et exercices)

- **Modes de convergence d'une suite de fonctions** : convergence simple, convergence uniforme, convergence uniforme implique convergence simple, lien entre convergence uniforme et convergence pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathscr{B}(\mathrm{I},\mathbb{K})$;
- **Régularité de la limite d'une suite de fonctions** : continuité de la limite, théorème de la double limite, intégration d'une limite, dérivation d'une limite, dérivation d'ordre supérieur d'une limite ;
- **Modes de convergence d'une série de fonctions** : convergence simple, convergence uniforme, convergence uniforme si et seulement si convergence simple et convergence uniforme de la suite des restes de la série de fonctions vers 0, convergence normale, convergence normale implique convergence uniforme ;
- **Régularité de la somme d'une série de fonctions** : continuité de la somme, théorème de la double limite, intégration d'une somme, dérivation d'une somme, dérivation d'ordre supérieur d'une somme.

Preuves exigibles : *(1) : S'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $|f_n(x_n) - f(x_n)|$ ne tend pas vers 0 alors $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f, (2) : Continuité de la limite d'une suite de fonctions, (3) : Intégration de la limite d'une suite de fonctions sur un segment, (4) : Dérivation d'une limite d'une suite de fonctions, (5) : Caractérisation de la convergence uniforme d'une série de fonctions par la convergence simple et la convergence uniforme de la suite des restes vers 0, (6) : Convergence normale implique convergence uniforme, (7) : Si $(u_n)_n$ ne converge pas uniformément vers 0 alors la série $\sum u_n$ ne converge pas uniformément.*