Lycée Descartes
Tours

PROGRAMME DE COLLES

PSI
2022 – 2023

Semaine du 16 au 21 janvier

Espaces préhilbertiens et euclidiens (Cours seulement)

- **Produit scalaire et norme associée** : produit scalaire, espace vectoriel des fonctions continues de carré intégrable sur un intervalle, espace préhilbertien, euclidien, norme associée à un produit scalaire, identités de polarisation, inégalité de Cauchy-Schwarz ;
- **Orthogonalité** : Vecteur normé, vecteurs orthogonaux, famille orthogonale, orthonormée, lien entre orthogonalité et liberté, théorème de Pythagore, procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, orthogonal d'un sous-espace vectoriel, l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel, relations sur les orthogonaux, base orthonormée, existence des bases orthonormées, coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée, expressions du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée, matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormée ;
- **Projection orthogonale** : supplémentaire orthogonal, dimension du supplémentaire orthogonal en dimension finie, projection orthogonale, expression et caractérisation du projeté orthogonal, inégalité de Bessel, distance à un sous-espace vectoriel et expression en fonction du projeté orthogonal, représentation des formes linéaires, distance d'un vecteur à un hyperplan.

Preuves exigibles : *(1) : produits scalaires canoniques sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, (2) : « identité remarquable » $\|x+y\|^2$ + identités de polarisation, (3) : inégalité de Cauchy Schwarz, (4) : une famille orthogonale constituée de vecteurs non nuls est libre, (5) : coordonnées d'un vecteur, produit scalaire et norme dans une base orthonormée, (6) :* $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\perp}$ *si* $\dim \mathrm{F}$ *est finie.*

Intégration

- **Intégration d'une fonction continue par morceaux sur un segment** : fonction continue par morceaux, opérations sur les fonctions continues par morceaux, intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment, propriétés de l'intégrale (linéarité, inégalité triangulaire, positivité, croissance, nullité), intégrale d'une fonction continue par morceaux à valeurs complexes ;
- **Intégrales généralisées** : Intégrale généralisée sur un intervalle semi-ouvert, intégrales de référence (intégrales de Riemann $\int_0^1 t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$), intégrale généralisée sur un intervalle ouvert, intégrales faussement impropres, propriétés des intégrales généralisées (linéarité, inégalité triangulaire, positivité, croissance, nullité), intégrale généralisée d'une fonction à valeurs complexes, crochet généralisé, changement de variable, intégrales de Riemann $\int_a^b (t-a)^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b (b-t)^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$, convergence absolue, convergence absolue implique convergence, intégrabilité, théorème de comparaison, espaces des fonctions intégrables et de carré intégrables, inégalité de Cauchy-Schwarz ;
- **Suites et séries de fonctions intégrables** : théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions, théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions ;
- **Intégrales à paramètre** : théorèmes de continuité, de dérivabilité et de classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre.

Preuves exigibles : *(1) : étude des intégrales de référence, (2) : crochet généralisé, (3) : intégration par parties généralisée, (4) : théorème de comparaison pour les fonctions intégrables, (5) : le produit de deux fonctions* L^2 *est* L^1.