Lycée Descartes
Tours

PROGRAMME DE COLLES

PSI
2024 – 2025

Semaine du 20 au 25 janvier

Endomorphismes d'un espace euclidien (Cours seulement)

⚠ **Uniquement ce qui n'est pas grisé.**

- **Isométries vectorielles** : définition, bijectivité, caractérisation par le produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée, opérations sur les isométries, stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable par une isométrie;
- **Matrices orthogonales** : définition, caractérisations classiques, caractérisation des isométries vectorielles, opérations sur les matrices orthogonales, déterminant d'une matrice orthogonale;
- **Espaces euclidiens orientés** : bases définissant la même orientation, orientation d'un espace euclidien, produit mixte, produit vectoriel en dimension 3 et propriétés;
- **Isométries vectorielles du plan** : description de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, produit de deux rotations, description des isométries directes et indirectes du plan;
- **Isométries vectorielles de l'espace** : expression matricielle des isométries en dimension 3, description des isométries directes;
- **Endomorphismes et matrices symétriques** : définition, structure de l'ensemble des endomorphismes symétriques, lien avec les matrices symétriques, théorème spectral, endomorphismes ou matrices positifs et définis positifs, caractérisation de ces derniers avec leur spectre.

Preuves exigibles : *(1) : caractérisation des isométries par le produit scalaire, (2) : caractérisation des isométries par l'image d'une base orthonormée, (3) : Si $\mathscr{B}$ est une b.o.n. et $\mathscr{B}'$ est une base, alors $\mathscr{B}'$ est orthonormée ssi la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$ est orthogonale, (4) :* $\mathrm{M} \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$ *ssi* $\mathrm{sp}(\mathrm{M}) \subset \mathbb{R}_+$.

Espaces préhilbertiens et euclidiens (Cours & Exercices)

⚠ **Uniquement des exercices simples (vérification qu'une application est un produit scalaire, recherche d'une B.O.N. d'un sous-e.v., calcul d'un projeté orthogonal...)**

- **Produit scalaire et norme associée** : produit scalaire, espace vectoriel des fonctions continues de carré intégrable sur un intervalle, espace préhilbertien, euclidien, norme associée à un produit scalaire, identités de polarisation, inégalité de Cauchy-Schwarz;
- **Orthogonalité** : Vecteur normé, vecteurs orthogonaux, famille orthogonale, orthonormée, lien entre orthogonalité et liberté, théorème de Pythagore, procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, orthogonal d'un sous-espace vectoriel, l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel, relations sur les orthogonaux, base orthonormée, existence des bases orthonormées, coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée, expressions du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée, matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormée;
- **Projection orthogonale** : supplémentaire orthogonal, dimension du supplémentaire orthogonal en dimension finie, projection orthogonale, expression et caractérisation du projeté orthogonal, inégalité de Bessel, distance à un sous-espace vectoriel et expression en fonction du projeté orthogonal, représentation des formes linéaires, distance d'un vecteur à un hyperplan.

Preuves exigibles : *(1) : produits scalaires canoniques sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, (2) : « identité remarquable » $\|x+y\|^2$ + identité de polarisation, (3) : inégalité de Cauchy Schwarz, (4) : une famille orthogonale constituée de vecteurs non nuls est libre, (5) : coordonnées d'un vecteur, produit scalaire et norme dans une base orthonormée, (6) :* $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp$ *si* $\dim \mathrm{F}$ *est finie.*

Intégration (Exercices seulement)

⚠ **Uniquement des intégrales à paramètre.**

- **Intégration d'une fonction continue par morceaux sur un segment** : fonction continue par morceaux, opérations sur les fonctions continues par morceaux, intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment, propriétés de l'intégrale (linéarité, inégalité triangulaire, positivité, croissance, nullité), intégrale d'une fonction continue par morceaux à valeurs complexes ;
- **Intégrales généralisées** : Intégrale généralisée sur un intervalle semi-ouvert, intégrales de référence (intégrales de Riemann $\int_0^1 t^{-\alpha}\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\mathrm{d}t$, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ et $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$), intégrale généralisée sur un intervalle ouvert, intégrales faussement impropres, propriétés des intégrales généralisées (linéarité, inégalité triangulaire, positivité, croissance, nullité), intégrale généralisée d'une fonction à valeurs complexes, crochet généralisé, changement de variable, intégrales de Riemann $\int_a^b (t-a)^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b (b-t)^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$, convergence absolue, convergence absolue implique convergence, intégrabilité, théorème de comparaison, espaces des fonctions intégrables et de carré intégrables, inégalité de Cauchy-Schwarz ;
- **Suites et séries de fonctions intégrables** : théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions, théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions ;
- **Intégrales à paramètre** : théorèmes de continuité, de convergence dominée pour le cas continu, de dérivabilité et de classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre.