

SEMAINE DU 5 FÉVRIER AU 10 FÉVRIER



ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE EUCLIDIEN (COURS & EXERCICES DE BASE)

- **Isométries vectorielles** : définition, bijectivité, caractérisation par le produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée, opérations sur les isométries, stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable par une isométrie;
- **Matrices orthogonales** : définition, caractérisations classiques, caractérisation des isométries vectorielles, opérations sur les matrices orthogonales, déterminant d'une matrice orthogonale;
- **Espaces euclidiens orientés** : bases définissant la même orientation, orientation d'un espace euclidien, produit mixte, produit vectoriel en dimension 3 et propriétés;
- **Isométries vectorielles du plan** : description de $O_2(\mathbb{R})$, produit de deux rotations, description des isométries directes et indirectes du plan;
- **Isométries vectorielles de l'espace** : expression matricielle des isométries en dimension 3, description des isométries directes;
- **Endomorphismes et matrices symétriques** : définition, structure de l'ensemble des endomorphismes symétriques, lien avec les matrices symétriques, théorème spectral, endomorphismes ou matrices positifs et définis positifs, caractérisation de ces derniers avec leur spectre.

PREUVES EXIGIBLES : (1) : caractérisation des isométries par le produit scalaire, (2) : caractérisation des isométries par l'image d'une base orthonormée, (3) : Si \mathcal{B} est une b.o.n. et \mathcal{B}' est une base, alors \mathcal{B}' est orthonormée ssi la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' est orthogonale, (4) : $M \in S_n^+(\mathbb{R})$ ssi $\text{sp}(M) \subset \mathbb{R}_+$.

ESPACES PRÉHILBERTIENS ET EUCLIDIENS (COURS & EXERCICES)

- **Produit scalaire et norme associée** : produit scalaire, espace vectoriel des fonctions continues de carré intégrable sur un intervalle, espace préhilbertien, euclidien, norme associée à un produit scalaire, identités de polarisation, inégalité de Cauchy-Schwarz;
- **Orthogonalité** : Vecteur normé, vecteurs orthogonaux, famille orthogonale, orthonormée, lien entre orthogonalité et liberté, théorème de Pythagore, procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, orthogonal d'un sous-espace vectoriel, l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel, relations sur les orthogonaux, base orthonormée, existence des bases orthonormées, coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée, expressions du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée, matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormée;
- **Projection orthogonale** : supplémentaire orthogonal, dimension du supplémentaire orthogonal en dimension finie, projection orthogonale, expression et caractérisation du projeté orthogonal, inégalité de Bessel, distance à un sous-espace vectoriel et expression en fonction du projeté orthogonal, représentation des formes linéaires, distance d'un vecteur à un hyperplan.

PREUVES EXIGIBLES : (1) : produits scalaires canoniques sur \mathbb{R}^n et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, (2) : « identité remarquable » $\|x + y\|^2 +$ identités de polarisation, (3) : inégalité de Cauchy Schwarz, (4) : une famille orthogonale constituée de vecteurs non nuls est libre, (5) : coordonnées d'un vecteur, produit scalaire et norme dans une base orthonormée, (6) : $E = F \oplus F^\perp$ si $\dim F$ est finie.