PROGRAMME DE COLLES

Semaine du 30 septembre au 5 octobre

Réduction (Cours seulement)

Seules les parties non grisées ont pour l'instant été abordées en cours...

- **Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice** : valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres, stabilité des espaces propres de u ou A par un endomorphisme ou une matrice qui commute avec u ou A, les espaces propres sont en somme directe, des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre, en dimension finie n, la somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure n et il y a au plus n valeurs propres;
- **Polynômes et éléments propres** : Pour un polynôme P on a $\mathrm{P}(u)(x) = \mathrm{P}(\lambda)x$ si x est vecteur propre associé à la valeur propre λ, les valeurs propres sont racines de tout polynôme annulateur;
- **Polynôme caractéristique d'un endomorphisme ou d'une matrice** : définition, degré, expression des coefficients en fonction de la trace et du déterminant, les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique, cas d'une matrice triangulaire, ordre de multiplicité d'une valeur propre, expression du déterminant et de la trace en fonction des valeurs propres dans le cas où le polynôme caractéristique est scindé, le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit par u sur un sous-espace stable divise le polynôme caractéristique de u, un espace propre est de dimension au moins 1 et au plus la multiplicité de la valeur propre, si une valeur propre est simple son espace propre est de dimension 1;
- **Endomorphismes et matrices diagonalisables** : définition, $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ est diagonalisable ssi il existe une base de E formée de vecteurs propres de u ou ssi E est la somme directe des espaces propres de u, $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec $\dim(\mathrm{E}) = n$ ou $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable ssi la somme des dimensions des espaces propres vaut n ou ssi le polynôme caractéristique est scindé et chaque espace propre est de dimension la multiplicité de la valeur propre, si $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec $\dim(\mathrm{E}) = n$ ou $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ possède n valeurs propres distinctes, il est diagonalisable;
- **Diagonalisation et polynômes annulateurs** : théorème de Cayley-Hamilton, $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ ou $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable ssi il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, si $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ est diagonalisable alors tout endomorphisme induit par u sur un sous-espace stable l'est aussi;
- **Endomorphismes et matrices trigonalisables** : définition, $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ ou $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé, tout endomorphisme sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ou toute matrice complexe est trigonalisable;
- **Applications** : Calcul des puissances d'une matrice, suites récurrentes linéaires, systèmes différentiels linéaires du premier ordre.

Preuves exigibles : *(1) : stabilité des sous-espaces propres de u par tout endomorphisme v commutant avec u, (2) : les sous-espaces propres sont en somme directe, (3) : des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre, (4) : la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut excéder la dimension de l'espace et conséquence : il y au plus n valeurs propres en dimension n, (5) : relation $\mathrm{P}(u)(x) = \mathrm{P}(\lambda)x$ si $x \in \mathrm{E}_\lambda(u)$ et conséquence : les valeurs propres sont racines de tout polynôme annulateur, (6) : deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique et donc mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités, (7) : une matrice n'ayant qu'une seule valeur propre λ est diagonalisable ssi elle vaut $\lambda \mathrm{I}_n$.*

***Méthodes exigibles :** (1) : méthode de diagonalisation, (2) : méthode de trigonalisation.*

Compléments d'algèbre (Cours & Exercices)

- **Produit et somme d'espaces vectoriels** : espace produit, somme de sous-espaces vectoriels, somme directe de sous-espaces vectoriels, dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels et caractérisation de la somme directe, sommes directes et bases, bases adaptées, définition d'une application linéaire par ses restrictions aux sous-espaces vectoriels d'une somme directe;

- **Matrices et endomorphismes** : polynôme de matrice, d'endomorphisme, opérations sur les polynômes de matrices et d'endomorphisme, polynôme annulateur, applications : calcul de l'inverse d'une matrice et des puissances d'une matrices, matrices par blocs et opérations, sous-espaces stables, cas de deux matrices ou endomorphismes qui commutent, traduction matricielle de la stabilité, matrices semblables, interprétation en termes d'endomorphismes, rang de deux matrices semblables, trace d'une matrice, opérations, trace de deux matrices semblables, trace d'un endomorphisme ;
- **Compléments sur les déterminants** : cas des matrices triangulaires par blocs, déterminant de Vandermonde ;
- **Interpolation de Lagrange** : polynômes de Lagrange, existence et unicité du problème associé, base d'interpolation, lien avec le déterminant de Vandermonde ;
- **Formes linéaires et hyperplans** : définitions d'une forme linéaire et d'un hyperplan, caractérisation d'un hyperplan en dimension finie.

Preuves exigibles : *(1) : dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels, (2) : opérations sur la trace d'une matrice, (3) : deux matrices semblables ont même trace et même déterminant, (4) : stabilité de l'image et du noyau d'un endomorphisme par un autre endomorphisme commutant avec le premier, (5) : déterminant de Vandermonde.*
Méthodes exigibles : *(1) : calcul de l'inverse d'une matrice et de ses puissances à l'aide d'un polynôme annulateur.*

Compléments sur les séries (Exercices seulement)

- **Séries à termes réels positifs** : règle de d'Alembert, formule de Stirling, comparaison séries – intégrales ;
- **Séries alternées** : définition, théorème spécial des séries alternées ;
- **Produit de Cauchy de deux séries** : définition, convergence du produit de Cauchy de deux séries.