Lycée Descartes
Tours

PROGRAMME DE COLLES

PSI
2024 – 2025

Semaine du 14 au 19 octobre

Espaces vectoriels normés (Cours seulement)

Seules les parties non grisées ont pour l'instant été abordées en cours...

- **Généralités** : norme, normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$, seconde inégalité triangulaire, distance associés à une norme, boule ouverte, boule fermée, sphère, parties convexes, parties, suites et fonctions bornées ;
- **Suites d'un espace vectoriel normé** : suite convergente, unicité de la limite, convergence et caractère borné, opérations sur les suites convergentes , suites extraites ;
- **Topologie d'un espace vectoriel normé** : point intérieur à une partie, intérieur d'une partie, partie ouverte, les boules ouvertes sont ouvertes, union et intersection d'ouverts, point adhérent à une partie, adhérence d'une partie, caractérisation séquentielle des points adhérents, partie fermée, caractérisation des fermés par l'adhérence, caractérisation séquentielle des fermés, les boules fermées sont fermées, union et intersection de fermés, frontière d'une partie ;
- **Limite et continuité d'applications entre espaces vectoriels normés** : limite, caractérisation séquentielle de la limite, unicité de la limite, opérations sur les limites, continuité, caractérisation séquentielle de la continuité, opérations sur la continuité, applications lipschitziennes, lipschitzienne implique continue, si $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ est continue, les ensembles $\{x \in \mathrm{E},\ f(x) = 0\}$ et $\{x \in \mathrm{E},\ f(x) \geqslant 0\}$ sont fermés et l'ensemble $\{x \in \mathrm{E},\ f(x) > 0\}$ est ouvert ;
- **En dimension finie** : normes équivalentes, conservation des propriétés par les normes équivalentes, équivalence des normes en dimension finie, convergence des suites grâce aux suites coordonnées dans une base, limite et continuité des applications grâce aux applications coordonnées dans une base, applications continues sur une partie fermée bornée, en dimension finie, les applications linéaires et multilinéaires sont continues, les applications polynomiales sur $\mathbb{K}^n$ sont continues, continuité de det.

Preuves exigibles : *(1) : seconde inégalité triangulaire, (2) : les boules ouvertes sont ouvertes, (3) : union et intersection d'ouverts, (4) : caractérisation séquentielle des points adhérents, (5) : si $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ est continue, l'ensemble $\{x \in \mathrm{E},\ f(x) = 0\}$ est fermé et variantes, (6) : continuité des applications linéaires en dimension finie.*

Réduction (Cours & exercices)

- **Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice** : valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres, stabilité des espaces propres de u ou A par un endomorphisme ou une matrice qui commute avec u ou A, les espaces propres sont en somme directe, des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre, en dimension finie n, la somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure n et il y a au plus n valeurs propres ;
- **Polynômes et éléments propres** : Pour un polynôme P on a $\mathrm{P}(u)(x) = \mathrm{P}(\lambda)x$ si x est vecteur propre associé à la valeur propre λ, les valeurs propres sont racines de tout polynôme annulateur ;
- **Polynôme caractéristique d'un endomorphisme ou d'une matrice** : définition, degré, expression des coefficients en fonction de la trace et du déterminant, les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique, cas d'une matrice triangulaire, ordre de multiplicité d'une valeur propre, expression du déterminant et de la trace en fonction des valeurs propres dans le cas où le polynôme caractéristique est scindé, le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit par u sur un sous-espace stable divise le polynôme caractéristique de u, un espace propre est de dimension au moins 1 et au plus la multiplicité de la valeur propre, si une valeur propre est simple son espace propre est de dimension 1 ;
- **Endomorphismes et matrices diagonalisables** : définition, $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ est diagonalisable ssi il existe une base de E formée de vecteurs propres de u ou ssi E est la somme directe des espaces propres de u, $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec

$\dim(E) = n$ ou $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable ssi la somme des dimensions des espaces propres vaut n ou ssi le polynôme caractéristique est scindé et chaque espace propre est de dimension la multiplicité de la valeur propre, si $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim(E) = n$ ou $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède n valeurs propres distinctes, il est diagonalisable ;

- **Diagonalisation et polynômes annulateurs** : théorème de Cayley-Hamilton, $u \in \mathcal{L}(E)$ ou $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable ssi il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, si $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable alors tout endomorphisme induit par u sur un sous-espace stable l'est aussi ;
- **Endomorphismes et matrices trigonalisables** : définition, $u \in \mathcal{L}(E)$ ou $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé, tout endomorphisme sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ou toute matrice complexe est trigonalisable ;
- **Applications** : Calcul des puissances d'une matrice, suites récurrentes linéaires, systèmes différentiels linéaires du premier ordre.

PREUVES EXIGIBLES : *(1) : stabilité des sous-espaces propres de u par tout endomorphisme v commutant avec u, (2) : les sous-espaces propres sont en somme directe, (3) : des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre, (4) : la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut excéder la dimension de l'espace et conséquence : il y au plus n valeurs propres en dimension n, (5) : relation* $P(u)(x) = P(\lambda)x$ *si* $x \in E_\lambda(u)$ *et conséquence : les valeurs propres sont racines de tout polynôme annulateur, (6) : deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique et donc mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités, (7) : une matrice n'ayant qu'une seule valeur propre* λ *est diagonalisable ssi elle vaut* λI_n.
MÉTHODES EXIGIBLES : *(1) : méthode de diagonalisation, (2) : méthode de trigonalisation.*