Lycée Descartes
Tours

PROGRAMME DE COLLES

PSI
2024 – 2025

Semaine du 11 au 16 novembre

Suites et séries de fonctions (Cours & exercices)

⚠ ***Uniquement des suites de fonctions cette semaine (pas encore de séries de fonctions). Le T.D. est à peine débuté (mais le cours contient de nombreux exemples...), privilégier des exercices « de base ».***

- **Modes de convergence d'une suite de fonctions** : convergence simple, convergence uniforme, convergence uniforme implique convergence simple, lien entre convergence uniforme et convergence pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathscr{B}(\mathrm{I},\mathbb{K})$;
- **Régularité de la limite d'une suite de fonctions** : continuité de la limite, théorème de la double limite, intégration d'une limite, dérivation d'une limite, dérivation d'ordre supérieur d'une limite ;
- **Modes de convergence d'une série de fonctions** : convergence simple, convergence uniforme, convergence uniforme si et seulement si convergence simple et convergence uniforme de la suite des restes de la série de fonctions vers 0, convergence normale, convergence normale implique convergence uniforme ;
- **Régularité de la somme d'une série de fonctions** : continuité de la somme, théorème de la double limite, intégration d'une somme, dérivation d'une somme, dérivation d'ordre supérieur d'une somme.

Preuves exigibles : *(1) : S'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $|f_n(x_n)-f(x_n)|$ ne tend pas vers 0 alors $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f, (2) : Continuité de la limite d'une suite de fonctions, (3) : Intégration de la limite d'une suite de fonctions sur un segment, (4) : Dérivation d'une limite d'une suite de fonctions, (5) : Caractérisation de la convergence uniforme d'une série de fonctions par la convergence simple et la convergence uniforme de la suite des restes vers 0, (6) : Convergence normale implique convergence uniforme, (7) : Si $(u_n)_n$ ne converge pas uniformément vers 0 alors la série $\sum u_n$ ne converge pas uniformément.*

Espaces vectoriels normés (Cours & exercices)

- **Généralités** : norme, normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$, seconde inégalité triangulaire, distance associés à une norme, boule ouverte, boule fermée, sphère, parties convexes, parties, suites et fonctions bornées ;
- **Suites d'un espace vectoriel normé** : suite convergente, unicité de la limite, convergence et caractère borné, opérations sur les suites convergentes , suites extraites ;
- **Topologie d'un espace vectoriel normé** : point intérieur à une partie, intérieur d'une partie, partie ouverte, les boules ouvertes sont ouvertes, union et intersection d'ouverts, point adhérent à une partie, adhérence d'une partie, caractérisation séquentielle des points adhérents, partie fermée, caractérisation des fermés par l'adhérence, caractérisation séquentielle des fermés, les boules fermées sont fermées, union et intersection de fermés, frontière d'une partie ;
- **Limite et continuité d'applications entre espaces vectoriels normés** : limite, caractérisation séquentielle de la limite, unicité de la limite, opérations sur les limites, continuité, caractérisation séquentielle de la continuité, opérations sur la continuité, applications lipschitziennes, lipschitzienne implique continue, si $f:\mathrm{E}\to\mathbb{R}$ est continue, les ensembles $\{x\in\mathrm{E},\ f(x)=0\}$ et $\{x\in\mathrm{E},\ f(x)\geqslant 0\}$ sont fermés et l'ensemble $\{x\in\mathrm{E},\ f(x)>0\}$ est ouvert ;
- **En dimension finie** : normes équivalentes, conservation des propriétés par les normes équivalentes, équivalence des normes en dimension finie, convergence des suites grâce aux suites coordonnées dans une base, limite et continuité des applications grâce aux applications coordonnées dans une base, applications continues sur une partie fermée bornée, en dimension finie, les applications linéaires et multilinéaires sont continues, les applications polynomiales sur $\mathbb{K}^n$ sont continues, continuité de det.

Preuves exigibles : *(1) : seconde inégalité triangulaire, (2) : les boules ouvertes sont ouvertes, (3) : union et intersection d'ouverts, (4) : caractérisation séquentielle des points adhérents, (5) : si* $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ *est continue, l'ensemble* $\left\{x \in \mathrm{E},\ f(x) = 0\right\}$ *est fermé et variantes, (6) : continuité des applications linéaires en dimension finie.*