PROGRAMME DE COLLES

Semaine du 21 au 26 novembre

Suites et séries de fonctions

- **Modes de convergence d'une suite de fonctions** : convergence simple, convergence uniforme, convergence uniforme implique convergence simple, lien entre convergence uniforme et convergence pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathscr{B}(\mathrm{I},\mathbb{K})$;
- **Régularité de la limite d'une suite de fonctions** : continuité de la limite, théorème de la double limite, intégration d'une limite, dérivation d'une limite, dérivation d'ordre supérieur d'une limite ;
- **Modes de convergence d'une série de fonctions** : convergence simple, convergence uniforme, convergence uniforme si et seulement si convergence simple et convergence uniforme de la suite des restes de la série de fonctions vers 0, convergence normale, convergence normale implique convergence uniforme ;
- **Régularité de la somme d'une série de fonctions** : continuité de la somme, théorème de la double limite, intégration d'une somme, dérivation d'une somme, dérivation d'ordre supérieur d'une somme.

Preuves exigibles : *(1) : S'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $|f_n(x_n)-f(x_n)|$ ne tend pas vers 0 alors $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f, (2) : Continuité de la limite d'une suite de fonctions, (3) : Intégration de la limite d'une suite de fonctions sur un segment, (4) : Dérivation d'une limite d'une suite de fonctions, (5) : Caractérisation de la convergence uniforme d'une série de fonctions par la convergence simple et la convergence uniforme de la suite des restes vers 0, (6) : Convergence normale implique convergence uniforme, (7) : Si $(u_n)_n$ ne converge pas uniformément vers 0 alors la série $\sum u_n$ ne converge pas uniformément.*