PLANCHES D'ORAUX

« Récolte » de 2025

Dernière mise à jour : Lundi 30 juin, 14h00.

A. Concours CCINP

Planche A1 — CCINP 2025

1. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^T M = MM^T$ et $M^2 + 2I_2 = 0$.
   - **1.1.** Justifier que $M^T M$ est diagonalisable.
   - **1.2.** Donner les valeurs propres de $M^T M$.
   - **1.3.** Montrer que $M/\sqrt{2}$ est orthogonale.
   - **1.4.** Donner toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant ces hypothèses.
2. **2.1.** Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}, \quad \frac{1}{t(t^2-1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{t+1}$$

   2.2. Résoudre sur $]1, +\infty[$ et $]0, 1[$ l'équation différentielle :

$$t(t^2-1)y' + 2y = t^2$$

Solution

1. **1.1.** La matrice $M^T M$ est symétrique réelle donc diagonalisable d'après le théorème spectral.

   1.2. On multiplie par $(M^T)^2$ la relation vérifiée par M. On obtient, en utilisant que M et M^T commutent :

$$(M^T)^2M^2 + 2(M^T)^2 = 0 \iff (M^T M)^2 + 2(M^2)^T = 0 \iff (M^T M)^2 + 2(-2I_2) = 0$$

   Ainsi $(M^T M)^2 - 4I_2 = 0$ et $P(X) = X^2 - 4$ est annulateur de $M^T M$. Par le cours, le spectre de $M^T M$ est inclus dans les racines de ce polynôme, c'est-à-dire dans $\{-2, 2\}$. Or on remarque que $M^T M$ est une matrice symétrique positive (si $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, on a $X^T M^T M X = (MX|MX) = \|MX\|^2 \geqslant 0$) de sorte que, par le cours, son spectre est composé de réels positifs. Ainsi $\mathrm{sp}(M^T M) = \{2\}$.

   1.3. Grâce aux questions précédentes, $M^T M$ est diagonalisable avec une unique valeur propre égal à 2 donc $M^T M = 2I_2$, ce qui donne bien que $M/\sqrt{2}$ est orthogonale.

   1.4. On sait que $M/\sqrt{2}$ est orthogonale. Si elle est orthogonale négative, $M/\sqrt{2}$ est une symétrie et son carré vaut l'identité, ce qui donne $M^2/4 = I_2$, soit $M^2 = 2I_2$, ce qui contredit $M^2 = -2I_2$. Si elle est orthogonale positive, $M/\sqrt{2}$ s'écrit sous le forme d'une matrice R_θ de rotation. On a alors $M = \sqrt{2}R_\theta$ et $M^2 = 2R_{2\theta}$. Enfin, $M^2 = -2I_2$ donne $R_{2\theta} = -I_2$ soit $2\theta = \pi \mod 2\pi$ i.e. $\theta = \pi/2 \mod \pi$. Cela donne finalement :

$$M = \pm \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

   Cela termine l'analyse, et réciproquement, pour la synthèse, on peut vérifier que ces deux matrices vérifient les hypothèses requises.
2. **2.1.** On réalise une décomposition en éléments simples et on trouve :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}, \quad \frac{1}{t(t^2-1)} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)}$$

2.2. On suit la méthode usuelle pour résoudre cette équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec second membre, la question précédente nous permettant de primitiver facilement $t \mapsto 1/(t(t^2-1))$. On trouve, sur $]1,+\infty[$ et $]0,1[$:

$$\mathscr{S} = \left\{ y : t \mapsto \frac{t^2}{t^2-1}(\ln t + \mathrm{C}), \quad \mathrm{C} \in \mathbb{R} \right\}$$

Planche A2 — CCINP 2025

1. Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

1.1. Déterminer le polynôme caractéristique de M_a.
Combien y a-t-il de valeurs propres pour M_a ?

1.2. La matrice M_a est-elle diagonalisable ?
Si oui, la diagonaliser en donnant la matrice de passage et la matrice diagonale.

1.3. M_a est-elle inversible ?

1.4. Déterminer $\operatorname{Ker} \mathrm{M}_a$ et $\operatorname{Im} \mathrm{M}_a$.

2. **2.1.** Rappeler la définition d'un produit de Cauchy et énoncer une condition suffisante pour l'appliquer.

2.2. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose, pour $n \geqslant 2$:

$$w_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum_{n\geqslant 2} w_n$ soit convergente.

Solution

1. **1.1.** Le calcul du polynôme caractéristique donne $\chi(\lambda) = (\lambda - a - 1)(\lambda - a + 1)(\lambda - 1)$. On en déduit que :

- Si $a = 2$, $\mathrm{sp}(\mathrm{M}_a) = \{1, 3\}$;
- Si $a = 0$, $\mathrm{sp}(\mathrm{M}_a) = \{-1, 1\}$;
- Sinon, $\mathrm{sp}(\mathrm{M}_a) = \{a-1, a+1, 1\}$.

1.2. En déterminant les espaces propres associés à chacune des valeurs propres, on peut trouver des matrices $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = \mathrm{D}$ avec :

- Si $a = 2$, $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Si $a = 0$, $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Sinon, $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & a-1 & a+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.3. On sait que M_a est inversible si et seulement si $0 \notin \mathrm{sp}(\mathrm{M}_a)$, c'est-à-dire si et seulement si $a \notin \{-1, 1\}$.

1.4. Si $a \notin \{-1, 1\}$, M_a est inversible donc $\operatorname{Ker}(\mathrm{M}_a) = \{0\}$ et $\operatorname{Im}(\mathrm{M}_a) = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Sinon :

- Si $a = 1$, $\operatorname{Ker} \mathrm{M}_a = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $\operatorname{Im}(\mathrm{M}_a) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$
- Si $a = -1$, $\operatorname{Ker} \mathrm{M}_a = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\operatorname{Im}(\mathrm{M}_a) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

2. **2.1.** Voir le cours.

2.2. On note $a_0 = 0$ et $a_n = 1/n^\alpha$ pour $n \geqslant 1$. On remarque que le produit de Cauchy de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n = \sum_{n\geqslant 1} 1/n^\alpha$ avec elle-même est la série de terme général w_n. Ainsi, si $\alpha > 1$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ étant absolument convergente, la question précédente donne que la série $\sum_{n\geqslant 2} w_n$ converge. La condition $\alpha > 1$ est donc suffisante et nous allons montrer qu'elle est nécessaire en supposant $\alpha \leqslant 1$ et en prouvant que la série $\sum_{n\geqslant 2} w_n$ est divergente. On débute avec le cas $\alpha = 1$. Une décomposition en éléments simples et un équivalent classique de la somme partielle de la série harmonique donne, pour $n \geqslant 2$:

$$w_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\ln n}{n}$$

On en déduit que $nw_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$, ce qui donne la divergence de la série $\sum_{n\geqslant 2} w_n$ par critère de Riemann. Enfin, si $\alpha < 1$, on a, pour $n \geqslant 2$:

$$w_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha} \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)}$$

Ce dernier terme donnant lieu à une série divergente par ce qui précède, la série $\sum_{n\geqslant 2} w_n$ est divergente par théorème de comparaison. Finalement, la série $\sum_{n\geqslant 2} w_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Planche A3 — CCINP 2025

1. On définit une suite en posant $u_0 = 3$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k}$$

On pose ensuite :

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$$

1.1. Rappeler la formule du produit de Cauchy de deux séries entières.
1.2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leqslant \frac{u_n}{n!} \leqslant 4^{n+1}$.
1.3. Vérifier que f est bien définie sur $]-1/4, 1/4[$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle $y' = y^2$.
1.4. Montrer que f ne s'annule pas sur $[0, 1/4[$.
1.5. Exprimer f sur $[0, 1/4[$.
1.6. En déduire une expression de u_n pour $n \in \mathbb{N}$.
1.7. Trouver le rayon de convergence de la série entière définissant f.

2. Soit E un $\mathbb{R}$−espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E vérifiant $f^3 + f = 0$.

2.1. Montrer que $\operatorname{Im} f$ est stable par f.
2.2. Trouver une expression de $f^2(x)$ pour $x \in \operatorname{Im} f$.
2.3. Soit g l'endomorphisme induit par f sur $\operatorname{Im} f$.
Montrer que g est un endomorphisme.
2.4. Montrer que f est de rang pair.

Solution

1. 1.1. Voir le cours.

1.2. On procède par récurrence forte.

- **Initialisation :** $u_0 = 3$ et la propriété est vraie au rang 0.
- **Hérédité :** On suppose le résultat établi pour les rangs $k \in [\![0, n]\!]$ avec $n \geqslant 0$ et on le prouve au rang $n+1$. Par hypothèse de récurrence, tous les $(u_k/k!)_{0\leqslant k\leqslant n}$, et donc les $(u_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, sont positifs de sorte que la formule donnant u_{n+1} établit que u_{n+1} est aussi positif. Ainsi $0 \leqslant \frac{u_{n+1}}{(n+1)!}$. Enfin, grâce à l'hypothèse de récurrence :

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^{k+1} k! 4^{n-k+1} (n-k)! = \sum_{k=0}^{n} n! 4^{n+2} = (n+1)! 4^{n+2}$$

Cela conclut la phase d'hérédité.

1.3. Grâce à la question précédente, par théorème de comparaison pour les rayons de convergence de séries entières, la série entière définissant f aura un rayon R supérieur à celui de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} 4^{n+1}x^n$, c'est-à-dire à $1/4$ (on obtient facilement ce rayon avec le critère de d'Alembert). Ainsi f est au moins bien définie sur $]-1/4, 1/4[$.
Sur cet intervalle, on réalise un produit de Cauchy ; on obtient, pour $x \in\,]-1/4, 1/4[$:

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{u_k}{k!}\,\frac{u_{n-k}}{(n-k)!}\right)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k u_{n-k}\right)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_{n+1}}{n!}x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n}{(n-1)!}x^{n-1} = f'(x) \end{aligned}$$

où la dernière égalité est justifiée par le théorème de dérivation terme à terme des séries entières. Ainsi f vérifie bien l'équation différentielle $y' = y^2$ sur $]-1/4, 1/4[$.

1.4. Soit $x \in [0, 1/4[$. On a prouvé ci-dessus que les $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont tous positifs donc :

$$f(x) = 3 + \sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{\frac{u_n}{n!}}_{\geqslant 0}\underbrace{x^n}_{\geqslant 0} \geqslant 3 > 0$$

Ainsi $f(x) > 0$ et $f(x) \neq 0$. On conclut bien que f ne s'annule pas sur $[0, 1/4[$.

1.5. On travaille sur $[0, 1/4[$ dans ce qui suit. Puisque f ne s'y annule pas, on a $f'/f^2 = 1$ et en primitivant, il vient $-1/f(x) = x + \mathrm{C}$ pour $x \in [0, 1/4[$ et une certaine constante $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$. Avec $f(0) = u_0 = 3$, on obtient :

$$\forall x \in [0, 1/4[, \quad f(x) = \frac{3}{1-3x}$$

1.6. Pour $x \in [0, 1/4[$, par développement en série entière, on a :

$$f(x) = \frac{3}{1-3x} = 3\sum_{n=0}^{+\infty}3^n x^n$$

Par unicité du développement en série entière, on peut identifier les coefficients, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_n}{n!} = 3^{n+1} \quad\Longleftrightarrow\quad u_n = 3^{n+1}n!$$

1.7. Avec l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, une application du critère de d'Alembert donne que le rayon de convergence de la série entière définissant f est $1/3$.

2. 2.1. C'est une question de cours. On se donne $y \in \operatorname{Im} f$. Son image $f(y)$ appartient trivialement à $\operatorname{Im} f$ donc $\operatorname{Im} f$ est stable par f.

2.2. Soit $x \in \operatorname{Im} f$ que l'on écrit $x = f(a)$ avec $a \in \mathrm{E}$. On a alors, en utilisant la relation donnée par l'énoncé : $f^2(x) = f^3(a) = -f(a) = -x$.

2.3. D'après la question précédente, l'endomorphisme g vérifie $g^2 = -\mathrm{id}_{\operatorname{Im} f}$, ce qui donne immédiatement que g est bijectif (avec $g^{-1} = -g$).

2.4. En passant au déterminant dans la relation $g^2 = -\mathrm{id}_{\operatorname{Im} f}$, il vient $\det(g)^2 = (-1)^{\dim(\operatorname{Im} f)}$. Étant donné que l'on travaille sur un $\mathbb{R}$−espace vectoriel, $\det(g)$ est réel et son carré ne saurait être négatif. Cela impose $\dim(\operatorname{Im} f)$ pair, c'est-à-dire que f est de rang pair.

B. Concours Mines – Télécom

Planche B1 — Mines – Télécom 2025

1. On pose, pour $n \geqslant 0$:

$$\mathrm{I}_n = \int_0^n \sqrt{1+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x$$

Déterminer un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

2.1. On suppose que f est un endomorphisme de E qui vérifie $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.
Montrer que n est pair et que le rang de f vaut $n/2$.
Prouver que $f \circ f = 0$.

2.2. Soit f une endomorphisme de E vérifiant $f \circ f = 0$ et $n = 2\operatorname{rg}(f)$.
Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ puis $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$.
Déterminer une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme suivante par blocs :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{I}_p & 0 \end{pmatrix}$$

Solution

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'intégrale I_n est bien définie en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment. On réalise le changement de variable $u = x/n$ qui donne :

$$\mathrm{I}_n = n\int_0^1 \sqrt{1+(1-u)^n}\,\mathrm{d}u$$

Les fonctions $g_n : u \mapsto \sqrt{1+(1-u)^n}\,\mathrm{d}u$ sont continues par morceaux sur $]\,0,1\,]$ et convergent simplement sur $]\,0,1\,]$ vers la fonction constante égale à 1 qui est continue par morceaux sur $]\,0,1\,]$. De plus, pour $u \in\,]\,0,1\,]$ et $n \geqslant 0$, on a $|g_n(u)| \leqslant \sqrt{2}$, et la fonction constante égale à $\sqrt{2}$ est intégrable sur $]\,0,1\,]$. Grâce au théorème de convergence dominée, on conclut que :

$$\int_0^1 \sqrt{1+(1-u)^n}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 1\,\mathrm{d}u = 1$$

On en déduit finalement que $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

2. **2.1.** Le théorème du rang donne $\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = n$. Avec l'égalité $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$, on obtient alors $2\dim(\operatorname{Im} f) = n$ i.e. $2\operatorname{rg}(f) = n$. Cela donne bien que n est pair avec $\operatorname{rg}(f) = n/2$.
Soit $x \in \mathrm{E}$. On a $f(x) \in \operatorname{Im} f$ et donc $f(x) \in \operatorname{Ker} f$ puisque $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$. Cela implique $f(f(x)) = 0$ i.e. $f \circ f(x) = 0$. Ceci valant pour tout x de E, on conclut bien que $f \circ f = 0$.

   2.2. Soit $y \in \operatorname{Im} f$ que l'on écrit $y = f(x)$ avec $x \in \mathrm{E}$. On a $f(y) = f \circ f(x) = 0$ par hypothèse, ce qui donne $y \in \operatorname{Ker} f$. On a bien prouvé $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. Grâce au théorème du rang, on a $\operatorname{rg}(f) + \dim(\operatorname{Ker} f) = n$. Mais $n = 2\operatorname{rg}(f)$ donc $\dim(\operatorname{Ker} f) = \operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im} f)$. Par inclusion et égalité des dimensions, on conclut $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$.
On note $p = \operatorname{rg}(f)$. On se donne $(y_1, \ldots, y_p)$ une base de $\operatorname{Ker} f$. Comme $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$, tous les y_i sont aussi dans $\operatorname{Im} f$ et on peut écrire $y_i = f(x_i)$ pour $i \in [\![1,p]\!]$. On pose alors $\mathscr{B} = (x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_p)$. La famille $\mathscr{B}$ a $2p = 2\operatorname{rg}(f) = n$ éléments et il suffit donc de prouver qu'elle est libre pour justifier que c'est une base de E. On suppose que l'on a $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p + \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_p y_p = 0$, c'est-à-dire $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p + \beta_1 f(x_1) + \cdots + \beta_p f(x_p) = 0$. En composant par f cette égalité, puisque $f \circ f = 0$, il vient $\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_p y_p = 0$ et donc $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$ puisque $(y_1, \ldots, y_p)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$. En reportant dans l'égalité de départ, on trouve pour la même raison que $\beta_1 = \cdots = \beta_p = 0$, ce qui prouve que $\mathscr{B}$ est bien une base de E. Enfin, on vérifie facilement que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est bien de la forme souhaitée.

1. On pose, pour $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^\alpha} \, dx$$

1.1. Discuter de l'existence de $F(\alpha)$ en fonction de α.

1.2. Calculer $F(2)$.

1.3. Étudier la continuité de F sur son domaine de définition et ses limites aux bornes.

2. Trouver l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $P^{-1}MP = M$ pour toute matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$.

SOLUTION

1. 1.1. L'intégrande $g_\alpha : x \mapsto x \ln x/(1+x^2)^\alpha$ est continu sur $]0, +\infty[$.

- En 0, on a $g_\alpha(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ par croissances comparées. Ainsi l'intégrande est prolongeable par continuité en 0 et donc intégrable au voisinage de 0.
- En $+\infty$, on a $g_\alpha(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \ln x/x^{2\alpha-1}$. Si $2\alpha - 1 > 1$, en choisissant β tel que $1 < \beta < 2\alpha - 1$, on a $x^\beta \times \ln x/x^{2\alpha-1} \to 0$ si $x \to +\infty$ et, par critère de Riemann et théorème de comparaison, g_α est intégrable au voisinage de $+\infty$. Si par contre $2\alpha - 1 \leqslant 1$, on a $x^{2\alpha-1} \times \ln x/x^{2\alpha-1} \to +\infty$ si $x \to +\infty$ et, par critère de Riemann et théorème de comparaison, g_α n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$. Ainsi g_α est intégrable au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Finalement F est définie sur $]1, +\infty[$.

1.2. On calcule $F(2)$ par intégration par parties en dérivant $x \mapsto \ln x$. Pour $a < b$ positifs, on a :

$$\int_a^b \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} \, dx = \left[\frac{\ln x}{2(1+x^2)} \right]_a^b - \int_a^b \frac{dx}{2x(1+x^2)}$$

En réalisant une décomposition en éléments simples, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} \, dx &= \left[\frac{\ln x}{2(1+x^2)} \right]_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{x}{1+x^2} \, dx \\
&= \left[\frac{\ln x}{2(1+x^2)} \right]_a^b - \frac{1}{2}[\ln x]_a^b + \frac{1}{4}\left[\ln(1+x^2)\right]_a^b \\
&= \frac{\ln b}{2(1+b^2)} - \frac{\ln a}{2(1+a^2)} - \frac{1}{2}\ln b + \frac{1}{2}\ln a + \frac{1}{4}\ln(1+b^2) - \frac{1}{4}\ln(1+a^2)
\end{aligned}$$

Le terme 1 tend vers 0 lorsque $b \to +\infty$ par croissances comparées. Le terme 6 tend vers 0 lorsque $a \to 0$. Les termes 2 et 4 mis ensemble tendent vers 0 lorsque $a \to 0$ par croissances comparées. Enfin, les termes 3 et 5 mis ensemble tendent vers 0 lorsque $b \to +\infty$. Finalement, $F(2) = 0$.

1.3. Pour la continuité, on applique le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.

- Pour $x > 0$, la fonction $\alpha \mapsto g_\alpha$ est continue sur $]1, +\infty[$.
- Pour $\alpha > 1$, $x \mapsto g_\alpha(x)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
- Pour $\alpha \in [a, b] \subset]1, +\infty[$ et $x > 0$, on a :

$$|g_\alpha(x)| \leqslant \frac{x \ln x}{(1+x^2)^a}$$

et cette dernière fonction est intégrable sur $]0, +\infty[$ (voir question **1.1** avec $\alpha = a > 1$).

Le théorème s'applique et F est continue sur $]1, +\infty[$.

Pour la limite en $+\infty$, on applique le théorème de convergence dominée à paramètre continu.

- Pour $x > 0$, $g_\alpha(x)$ tend vers 0 lorsque α tend vers $+\infty$ et la fonction nulle est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
- Pour $\alpha > 1$, $x \mapsto g_\alpha(x)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
- Pour $\alpha \in [a, +\infty[\subset]1, +\infty[$ et $x > 0$, on a :

$$|g_\alpha(x)| \leqslant \frac{x \ln x}{(1+x^2)^a}$$

et cette dernière fonction est intégrable sur $]0, +\infty[$ (voir question **1.1** avec $\alpha = a > 1$).

Le théorème s'applique et F tend vers 0 lorsque α tend vers $+\infty$.
Pour la limite en 1, par application du théorème de convergence dominée à paramètre continu, on peut facilement montrer que :

$$\int_0^1 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^\alpha}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[\alpha\to 1]{} \int_0^1 \frac{x\ln x}{(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

Reste à étudier l'autre morceau. On remarque que $\mathrm{G} : \alpha \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ est décroissante par croissance de l'intégrale, ce qui permet d'affirmer que G admet une limite finie ou infinie en 1 grâce au théorème de la limite monotone. Supposons cette limite finie et notons-la ℓ. Par positivité de l'intégrale, pour tout $a \geqslant 1$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^\alpha}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_1^{a} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

Par passage à la limite (en utilisant le théorème de convergence dominée à paramètre continu sur le terme de droite), on obtient :

$$\ell \geqslant \int_1^{a} \frac{x\ln x}{(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

Mais on a prouvé en question **1.1** que l'intégrale $\int_1^{+\infty}(x\ln x)/(1+x^2)\,\mathrm{d}x$ est divergente de sorte que, l'intégrande étant positif, pour a assez grand, $\int_1^{a}(x\ln x)/(1+x^2)\,\mathrm{d}x$ dépassera ℓ, ce qui est absurde. Ainsi G et donc F tend vers $+\infty$ en 1.

2. On se donne une matrice $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = \mathrm{M}$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Si u est l'endomorphisme canoniquement associé à M, cela signifie que la matrice de u est la même dans toutes les bases. Notons $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a donc $\mathrm{M} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$. On se donne $j \in [\![1\,,n]\!]$ et $\beta \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. On considère la famille $\mathscr{B}' = (e_1,\dots,\beta e_j,\dots,e_n)$ où l'on a multiplié le j−ème vecteur de $\mathscr{B}$ par β. On observe que, β étant non nul, $\mathscr{B}'$ est toujours une base. De plus, en écrivant la matrice de u dans la base $\mathscr{B}'$ et en utilisant le fait qu'elle doit être la même que M, on trouve en identifiant les colonnes j de ces deux matrices que $m_{i,j} = 0$ pour tout $i \neq j$ (grâce au fait que $\beta \neq 1$). Ceci valant pour tout j, on trouve donc que la matrice M est diagonale. Enfin, on fixe $(i,j) \in [\![1\,,n]\!]^2$ avec $i \neq j$. On considère $\mathscr{B}''$ la base obtenue en échangeant les vecteurs e_i et e_j dans la base canonique. En écrivant la matrice de u dans la base $\mathscr{B}''$ et en utilisant le fait qu'elle doit être la même que M, on trouve en identifiant ces deux matrices que $m_{i,i} = m_{j,j}$. Ceci valant pour (i,j) avec $i \neq j$, on trouve que les coefficients diagonaux de M sont tous égaux. Finalement M s'écrit $\alpha\mathrm{I}_n$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
Réciproquement, une matrice de la forme $\mathrm{M} = \alpha\mathrm{I}_n$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifie bien $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = \mathrm{M}$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

C. Concours Mines – Ponts

D. Concours Centrale – Supélec