SUITES ET SÉRIES NUMÉRIQUES

Révisions de première année

Plan du cours

I. Suites

Une *suite réelle* est une famille de nombres réels indexée par $\mathbb{N}$, c'est-à-dire une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Pour désigner une suite $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ on utilisera les notations u, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n). Le réel u_n est le terme d'indice n de la suite u.

Remarque Dans ce qui suit, les suites seront définies sur $\mathbb{N}$ tout entier mais, en pratique, il est courant de rencontrer des suites définies sur un intervalle d'entiers de la forme $[\![n_0, +\infty[\![$ pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$. Tout ce qui suit peut facilement être adapté à ce cas.

Dans la suite, on notera $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ sur lequel on a prolongé la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ ainsi que les opérations $+$ et $\times$ de $\mathbb{R}$ lorsque cela est possible.
Pour rappel, les trois cas non définis sont « $(+\infty) + (-\infty)$ », « $0 \times (+\infty)$ » et « $0 \times (-\infty)$ ».

Propriété vraie à partir d'un certain rang On dira qu'une propriété $\mathscr{P}_n$ dépendante de $n \in \mathbb{N}$ est vraie à partir d'un certain rang s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_n$ soit vérifiée pour tout $n \geqslant n_0$.

I. 1. Limite d'une suite

Définition 1 – *Limite*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Cas d'une limite finie

- Si $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* ℓ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Cas d'une limite infinie

- Si $\ell = +\infty$, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$ si :

$$\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad u_n \geqslant \mathrm{M}$$

- Si $\ell = -\infty$, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $-\infty$ si :

$$\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad u_n \leqslant \mathrm{M}$$

Notation Dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite, on utilisera les notations $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ou encore $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Remarque – *Unicité de la limite*
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite alors cette limite est unique.

Vocabulaire Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite **finie**, on dit qu'elle est *convergente*. Sinon, on dit qu'elle est *divergente*.
Une suite est donc divergente si elle admet $-\infty$ ou $+\infty$ pour limite ou si elle n'admet pas de limite.

Proposition 1 – *Convergence et caractère borné*

Toute suite convergente est bornée.

I. 2. Opérations sur les limites

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites, $(\ell, \ell') \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- **Combinaison linéaire**
  Si $\lim\limits_{+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{+\infty} v_n = \ell'$ alors $\lim\limits_{+\infty}(\lambda u_n + v_n) = \lambda\ell + \ell'$.
- **Produit**
  Si $\lim\limits_{+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{+\infty} v_n = \ell'$ alors $\lim\limits_{+\infty} u_n v_n = \ell\ell'$.
- **Inverse**
  Si $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{+\infty} u_n = \ell$ alors :
  si $\ell \neq 0$, $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{\ell}$ et si $\ell = 0^+$ (resp. $\ell = 0^-$), $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite, $a \in \overline{\mathrm{D}}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

- **Composition à gauche par une fonction**
  Si $\lim\limits_{+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{a} f = \ell$ alors $\lim\limits_{+\infty} f(u_n) = \ell$.

Remarque – *Forme indéterminée*
Dans le cas des opérations algébriques, le résultat n'est valable que si les opérations dans $\overline{\mathbb{R}}$ qui apparaissent, à savoir $\lambda\ell + \ell'$, $\ell\ell'$ ou $1/\ell$ (avec la convention $1/(+\infty) = 1/(-\infty) = 0$), ont un sens. Si ce n'est pas le cas, on parle alors de *forme indéterminée* et il faut approfondir l'étude de la limite.
Pour rappel, les cas problématiques sont « $(+\infty) + (-\infty)$ », « $0 \times (+\infty)$ » et « $0 \times (-\infty)$ ».

I. 3. Limites et inégalités

Proposition 2 – *Limite et signe*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que $\lim\limits_{+\infty} u_n = \ell$.
Si $\ell > 0$ ou $\ell = +\infty$ alors u_n est strictement positif à partir d'un certain rang.

Proposition 3 – *Passage à la limite dans une inégalité*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent des limites finies.
Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang alors $\lim\limits_{+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{+\infty} v_n$.

Remarque Cela ne fonctionne pas avec des inégalités strictes.
Par exemple, $e^{-n} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$.

Proposition 4 – *Limite par encadrement*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites et $\ell \in \mathbb{R}$.
Si $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{+\infty} u_n = \lim\limits_{+\infty} w_n = \ell$ alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{+\infty} v_n = \ell$.

Proposition 5 – *Limite par minoration ou majoration*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.
On suppose que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si $\lim\limits_{+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{+\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{+\infty} u_n = -\infty$.

I. 4. Limite monotone

Théorème 1 – *Théorème de la limite monotone*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante.
Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée alors elle converge vers $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$, sinon $\lim\limits_{+\infty} u_n = +\infty$.

Remarque Un énoncé similaire peut être écrit dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

I. 5. Suites adjacentes

Définition 2 – *Suites adjacentes*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.
On dit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont *adjacentes* si l'un des deux suites est croissante, l'autre décroissante et si $\lim\limits_{+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Théorème 2 – *Théorème des suites adjacentes*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.
Si elles sont adjacentes alors elles sont toutes deux convergentes de même limite ℓ.
De plus, si par exemple $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$$

I. 6. Suites extraites

Définition 3 – *Suite extraite*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.
On appelle *suite extraite* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ où $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante.

Proposition 6 – *Limites de suites extraites*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$.

- Si $\lim\limits_{+\infty} u_n=\ell$ alors $\lim\limits_{+\infty} u_{\varphi(n)}=\ell$ pour toute fonction $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante.
  En particulier, on a $\lim\limits_{+\infty} u_{2n}=\lim\limits_{+\infty} u_{2n+1}=\ell$.
- Si $\lim\limits_{+\infty} u_{2n}=\lim\limits_{+\infty} u_{2n+1}=\ell$ alors $\lim\limits_{+\infty} u_n=\ell$.

Exemple La suite u définie par $u_n=(-1)^n$ pour $n\in\mathbb{N}$ n'admet pas de limite puisque $\lim\limits_{+\infty} u_{2n}=1$ et $\lim\limits_{+\infty} u_{2n+1}=-1$.

I. 7. Relations de comparaison

Définition 4 – *Relations de comparaison*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *dominée par* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'on écrit $u_n=\mathrm{O}(v_n)$ si :
$$\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}\text{ est bornée}$$
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *négligeable devant* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'on écrit $u_n=o(v_n)$ si :
$$\lim_{+\infty}\frac{u_n}{v_n}=0$$
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *équivalente à* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'on écrit $u_n\underset{+\infty}{\sim}v_n$ si :
$$\lim_{+\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$$

Remarques

- On peut démontrer que la relation d'équivalence $\sim$ est :
  - symétrique : $u_n\underset{+\infty}{\sim}v_n$ équivaut à $v_n\underset{+\infty}{\sim}u_n$;
  - transitive : si $u_n\underset{+\infty}{\sim}v_n$ et $v_n\underset{+\infty}{\sim}w_n$ alors $u_n\underset{+\infty}{\sim}w_n$.

  Les relations de domination O et de négligeabilité o sont transitives mais pas symétriques.
- On a $u_n\underset{+\infty}{\sim}v_n$ si et seulement si $u_n-v_n=o(v_n)$.
- On a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $u_n=\mathrm{O}(1)$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 si et seulement si $u_n=o(1)$.

Proposition 7 – *Limite et équivalent*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites et $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$. On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

- Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et si $\lim\limits_{+\infty} v_n = \ell$ alors $\lim\limits_{+\infty} u_n = \ell$.
- Si $\lim\limits_{+\infty} u_n = \ell$ avec $\ell \neq 0$ alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} \ell$.

Proposition 8 – *Obtention d'un équivalent par encadrement*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites. On suppose que $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
Si l'on a $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} k_n$ et $w_n \underset{+\infty}{\sim} k_n$ alors $v_n \underset{+\infty}{\sim} k_n$.

Proposition 9 – *Signe et équivalent*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

- Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également positive à partir d'un certain rang.
- Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

Proposition 10 – *Opérations sur les équivalents*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites. On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

- **Produit :** Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $x_n \underset{+\infty}{\sim} y_n$ alors :
$$u_n x_n \underset{+\infty}{\sim} v_n y_n$$
- **Quotient :** Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $x_n \underset{+\infty}{\sim} y_n$ alors :
$$\frac{u_n}{x_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{v_n}{y_n}$$
- **Puissance :** Si $k \in \mathbb{N}$ et si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors :
$$u_n^k \underset{+\infty}{\sim} v_n^k$$

Remarque On ne peut pas sommer les équivalents.
Par exemple, $n+1 \underset{+\infty}{\sim} n$ et $-n+2 \underset{+\infty}{\sim} -n+1$ mais l'on a pas $3 \underset{+\infty}{\sim} 1$.

I. 8. Extension aux suites complexes

Une *suite complexe* est une famille de nombres complexes indexée par $\mathbb{N}$, c'est-à-dire une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$. Il est possible d'étendre la notion de limite **finie** aux suites complexes. En effet, il suffit de reprendre l'assertion pour le cas d'une limite finie de la **Définition 1** et de remplacer les valeurs absolues par des modules.

Les inégalités n'ayant pas de sens dans $\mathbb{C}$, on ne peut plus parler de limite infinie, de suite majorée, minorée ou monotone. En revanche, il est possible de définir la notion de suite complexe bornée : une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *bornée* s'il existe un réel $K \geqslant 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'on a $|u_n| \leqslant K$.

Ainsi, parmi les énoncés précédents, la **Proposition 1**, les opérations sur les limites tant que $\pm\infty$ n'apparaissent pas et les **Définition 3** et **Proposition 6** restent valables dans le cas complexe. Les autres n'ont plus de sens car ils reposent sur la relation d'ordre de $\mathbb{R}$.

Enfin, l'étude de la limite d'une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut se ramener à l'étude de la limite des deux suites réelles $(\mathrm{Re}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ comme le précise le résultat suivant.

Théorème 3 – *Limite d'une suite complexe et de ses parties réelle et imaginaire*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$.
Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $\lim\limits_{+\infty} u_n = \ell$

(2) $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) = \mathrm{Re}(\ell)$ et $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{Im}(u_n) = \mathrm{Im}(\ell)$

II. Séries

Dans la suite, sauf mention du contraire, les suites considérées peuvent être réelles ou complexes.

II. 1. Définitions et propriétés

Définition 5 – *Série*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle *somme partielle d'ordre n* la quantité S_n définie par :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$
- On appelle *série de terme général u_n* la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On la note $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ ou $\sum u_n$.
- On dit que la série $\sum u_n$ *converge* si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Sinon, on dit qu'elle *diverge*.
- **En cas de convergence**, on appelle *somme de la série* la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on la note :
$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$
- **En cas de convergence**, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle *reste d'ordre n* la quantité R_n définie par :
$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$
On a alors $\quad R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n + R_n = S$.

Remarque Le terme général d'une série n'est pas toujours défini sur $\mathbb{N}$ tout entier, on adapte alors les notations. À noter que les premiers termes d'une série n'ont aucune influence sur sa convergence ou sa divergence. En revanche, ils affectent la valeur de la somme de la série en cas de convergence.

Vocabulaire Étudier la *nature* d'une série, c'est étudier si elle est convergente ou divergente.

Proposition 11 – *Condition nécessaire de convergence*

Si la série $\sum u_n$ converge alors $\lim\limits_{+\infty} u_n = 0$.

Remarque La réciproque est fausse.
En effet, la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ fournit un exemple de série divergente dont le terme général tend vers 0.

Vocabulaire Par contraposée, lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, la série $\sum u_n$ diverge.
On dit alors qu'elle est *grossièrement divergente*.

Proposition 12 – *Lien suite – série*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$ sont de même nature.
- **En cas de convergence**, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n)=\lim_{+\infty}u_n-u_0$$

II. 2. Séries de référence

Proposition 13 – *Séries géométriques, séries de Riemann*

Soient $q\in\mathbb{C}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$.

- La série $\sum_{n\geqslant 0}q^n$, dite *série géométrique*, converge si et seulement si $|q|<1$.
  En cas de convergence, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}q^n=\frac{1}{1-q}$$

- La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$, dite *série de Riemann*, converge si et seulement si $\alpha>1$.

II. 3. Séries à termes réels positifs

Proposition 14 – *Condition nécessaire et suffisante de convergence*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive à partir d'un certain rang.
Alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement la suite de ses sommes partielles est majorée.

Remarque En effet, la série étant à termes réels positifs, la suite de ses sommes partielles est clairement croissante.
Le résultat découle alors du théorème de la limite monotone pour les suites.

Théorème 4 – *Théorème de comparaison*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles positives à partir d'un certain rang.

- Si $u_n\leqslant v_n$ à partir d'un certain rang ou si $u_n=\mathrm{O}(v_n)$ alors :
  - Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge ;
  - Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.
- Si $u_n\underset{+\infty}{\sim}v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Remarques

- Le théorème de comparaison s'applique bien entendu à des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de signe constant quitte à considérer $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et/ou $(-v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour les rendre positives.

- Lorsque les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas de signe constant, il est intéressant de travailler sur les suites positives $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(|v_n|)_{n\in\mathbb{N}}$. Si l'on obtient la convergence de $\sum |u_n|$, c'est-à-dire la convergence absolue de $\sum u_n$ alors on peut en déduire la convergence de $\sum u_n$. En revanche, la divergence de $\sum |v_n|$ ne permet pas de conclure sur la nature de $\sum v_n$. Pour plus de détails, voir le paragraphe suivant.

II. 4. Séries absolument convergentes

Définition 6 – *Convergence absolue*

On dit que la série $\sum u_n$ *converge absolument* si la série $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 5 – *Convergence absolue implique convergence*

Si la série $\sum u_n$ converge absolument alors elle converge.

De plus :
$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Remarque La réciproque est fausse.
Par exemple, on verra cette année que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge bien qu'elle ne converge pas absolument.