FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

Révisions de première année

Plan du cours

L'ensemble de définition des fonctions considérées dans la suite sera soit une *partie* D *quelconque* de $\mathbb{R}$ soit un *intervalle* I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
On rappelle que l'on appelle *intervalle de* $\mathbb{R}$ toute partie I de $\mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathrm{I}^2$ avec $x \leqslant y$ l'on a $[x, y] \subset \mathrm{I}$.

Dans la suite, on notera $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ sur lequel on a prolongé la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ ainsi que les opérations $+$ et $\times$ de $\mathbb{R}$ lorsque cela est possible.
Pour rappel, les trois cas non définis sont « $(+\infty) + (-\infty)$ », « $0 \times (+\infty)$ » et « $0 \times (-\infty)$ ».

Notion de voisinage Si $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on appelle *voisinage de* a :
- si $a \in \mathbb{R}$, tout intervalle de la forme $]a - r, a + r[$ avec $r > 0$;
- si $a = -\infty$, tout intervalle de la forme $]-\infty, \mathrm{M}[$ avec $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$;
- si $a = +\infty$, tout intervalle de la forme $]\mathrm{M}, +\infty[$ avec $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$.

Notion de point adhérent Si $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}$, on dit que $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est *adhérent à* D si tout voisinage V_a de a vérifie $\mathrm{V}_a \cap \mathrm{D} \neq \emptyset$.
Par exemple, 0 est adhérent à $[0, 1]$, 0 est adhérent à $]0, 1]$ et $+\infty$ est adhérent à $[1, +\infty[$. En d'autres termes, a est adhérent à D s'il appartient à D ou s'il est « au bord de D ».
On notera $\overline{\mathrm{D}}$ l'ensemble des points adhérents à D, ce qui est cohérent avec la notation $\overline{\mathbb{R}}$.

Notion de point intérieur Si $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}$, on dit que $a \in \mathrm{D}$ est un point *intérieur à* D s'il existe un voisinage V_a du point a tel que $\mathrm{V}_a \subset \mathrm{D}$.
Par exemple, 1 est intérieur à $]0, 2]$ mais 0 et 2 ne le sont pas. En d'autres termes, a est un point intérieur à D s'il n'est pas « au bord de D ».
On notera $\mathring{\mathrm{D}}$ l'ensemble des points intérieurs à D.

Propriété vraie au voisinage d'un point On dira que $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ vérifie une propriété $\mathscr{P}$ au voisinage de $a \in \overline{\mathrm{D}}$ s'il existe un voisinage V_a de a tel que $\mathscr{P}$ soit vérifiée sur $\mathrm{V}_a \cap \mathrm{D}$.

I. Limites

I. 1. Définitions

Définition 1 – *Limite*

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{\mathrm{D}}$ un point adhérent à D et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Cas d'une limite finie

- Si $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, on dit que $f(x)$ *tend vers* ℓ *quand* x *tend vers* a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathrm{D}, \quad |x - a| \leqslant \eta \implies \left|f(x) - \ell\right| \leqslant \varepsilon$$

- Si $\ell \in \mathbb{R}$ et $a = -\infty$, on dit que $f(x)$ *tend vers* ℓ *quand* x *tend vers* $-\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathrm{D}, \quad x \leqslant \mathrm{M} \implies \left|f(x) - \ell\right| \leqslant \varepsilon$$

- Si $\ell \in \mathbb{R}$ et $a = +\infty$, on dit que $f(x)$ *tend vers* ℓ *quand* x *tend vers* $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathrm{D}, \quad x \geqslant \mathrm{M} \implies \left|f(x) - \ell\right| \leqslant \varepsilon$$

Cas d'une limite infinie

- Si $\ell = +\infty$ et $a \in \mathbb{R}$, on dit que $f(x)$ *tend vers* ℓ *quand* x *tend vers* a si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D, \quad |x-a| \leqslant \eta \implies f(x) \geqslant M$$

- Si $\ell = +\infty$ et $a = -\infty$, on dit que $f(x)$ *tend vers* ℓ *quand* x *tend vers* $-\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in D, \quad x \leqslant N \implies f(x) \geqslant M$$

- Si $\ell = +\infty$ et $a = +\infty$, on dit que $f(x)$ *tend vers* ℓ *quand* x *tend vers* $+\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in D, \quad x \geqslant N \implies f(x) \geqslant M$$

- Les définitions dans le cas $\ell = -\infty$ se déduisent en travaillant sur $-f$.

Notation Dans le cas où f admet ℓ pour limite en a, on utilisera les notations $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ ou $\ell = \lim\limits_{a} f$ ou encore $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ ou $f \xrightarrow[a]{} \ell$.

Remarque – *Unicité de la limite*
Si $f : D \to \mathbb{R}$ admet une limite en $a \in \overline{D}$ alors cette limite est unique.

Proposition 1 – *Limite finie et caractère localement borné*

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{D}$ un point adhérent à D.
Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.

I. 2. Limites à gauche et à droite

Définition 2 – *Limite à gauche et à droite*

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{D}$ un point adhérent à D et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que f est définie à gauche et à droite au voisinage de a.

- On dit que f *admet* ℓ *pour limite à gauche en* a si $f_{|D \cap]-\infty, a[}$ admet ℓ pour limite en a.
- On dit que f *admet* ℓ *pour limite à droite en* a si $f_{|D \cap]a, +\infty[}$ admet ℓ pour limite en a.

Notation Dans le cas où f admet ℓ pour limite à gauche (resp. à droite) au point a, on utilisera les notations $\ell = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ou $\ell = \lim\limits_{a^-} f$ (resp. $\ell = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ou $\ell = \lim\limits_{a^+} f$).

Proposition 2 – *Lien entre limite et limites à gauche et à droite*

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{D}$ un point adhérent à D et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que f est définie à gauche et à droite au voisinage de a.

- Si $a \in D$, alors $\lim\limits_{a} f = \ell$ si et seulement si $\lim\limits_{a^-} f = \lim\limits_{a^+} f = \ell$ et $\ell = f(a)$.
- Si $a \notin D$, alors $\lim\limits_{a} f = \ell$ si et seulement si $\lim\limits_{a^-} f = \lim\limits_{a^+} f = \ell$.

Exemple La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ vérifie $\lim\limits_{0^-} f = \lim\limits_{0^+} f = 0 \neq f(0)$.
De fait, f n'admet pas de limite en 0.

I. 3. Opérations sur les limites

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions, $a \in \overline{\mathrm{D}}$, $(\ell, \ell') \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- **Combinaison linéaire**
  Si $\lim_a f = \ell$ et $\lim_a g = \ell'$ alors $\lim_a(\lambda f + g) = \lambda\ell + \ell'$.
- **Produit**
  Si $\lim_a f = \ell$ et $\lim_a g = \ell'$ alors $\lim_a fg = \ell\ell'$.
- **Inverse**
  Si $f \neq 0$ sur D et $\lim_a f = \ell$ alors :
  si $\ell \neq 0$, $\lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$ et si $\ell = 0^+$ (resp. $\ell = 0^-$), $\lim_a \frac{1}{f} = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathrm{E}$ et $g : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ deux fonctions, $a \in \overline{\mathrm{D}}$ et $b \in \overline{\mathrm{E}}$.

- **Composition**
  Si $\lim_a f = b$ et $\lim_b g = \ell$ alors $\lim_a (g \circ f) = \ell$.

Remarque – *Forme indéterminée*
Dans le cas des opérations algébriques, le résultat n'est valable que si les opérations dans $\overline{\mathbb{R}}$ qui apparaissent, à savoir $\lambda\ell + \ell'$, $\ell\ell'$ ou $1/\ell$ (avec la convention $1/(+\infty) = 1/(-\infty) = 0$), ont un sens. Si ce n'est pas le cas, on parle alors de *forme indéterminée* et il faut approfondir l'étude de la limite.
Pour rappel, les cas problématiques sont « $(+\infty) + (-\infty)$ », « $0 \times (+\infty)$ » et « $0 \times (-\infty)$ ».

I. 4. Limites et inégalités

Proposition 3 – *Limite et signe*

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{\mathrm{D}}$ un point adhérent à D et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que $\lim_a f = \ell$.
Si $\ell > 0$ ou $\ell = +\infty$ alors f est strictement positive au voisinage de a.

Proposition 4 – *Passage à la limite dans une inégalité*

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{\mathrm{D}}$ un point adhérent à D. On suppose que f et g admettent des limites finies en a.
Si $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a alors $\lim_a f \leqslant \lim_a g$.

Remarque Cela ne fonctionne pas avec des inégalités strictes.
Par exemple, $e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ mais $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$.

Proposition 5 – *Limite par encadrement*

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$, $g : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ trois fonctions, $a \in \overline{\mathrm{D}}$ un point adhérent à D et $\ell \in \mathbb{R}$.
Si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ au voisinage de a et si $\lim_a f = \lim_a h = \ell$ alors g admet une limite en a et $\lim_a g = \ell$.

Proposition 6 – *Limite par minoration ou majoration*

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$, $g : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{\mathrm{D}}$ un point adhérent à D.

- Si $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a et si $\lim_a f = +\infty$ alors $\lim_a g = +\infty$.

- Si $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a et si $\lim_a g = -\infty$ alors $\lim_a f = -\infty$.

I. 5. Caractérisation séquentielle de la limite

Proposition 7 – *Caractérisation séquentielle*

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{\mathrm{D}}$ un point adhérent à D et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $\lim_a f = \ell$

(2) Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans D de limite a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite ℓ.

Exemple La fonction sin n'admet pas de limite en $+\infty$ puisque :

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(2n\pi) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

I. 6. Limite monotone

Théorème 1 – *Théorème de la limite monotone*

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $a < b$ une fonction croissante.
Alors f admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ en b. Si f est majorée alors $\lim_b f$ est finie et vaut $\sup_{[a,b[} f$, sinon $\lim_b f = +\infty$.

Remarque Des énoncés similaires peuvent être écrits dans le cas où l'intervalle de définition est de la forme $]a, b]$ et/ou dans le cas où f est décroissante.

I. 7. Extension aux fonctions complexes

Il est possible d'étendre la notion de limite **finie** aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$. En effet, il suffit de reprendre les assertions pour le cas d'une limite finie de la **Définition 1** et de remplacer les valeurs absolues par des modules.

Les inégalités n'ayant pas de sens dans $\mathbb{C}$, on ne peut plus parler de limite infinie, de fonction majorée, minorée ou monotone. En revanche, il est possible de définir la notion de fonction complexe bornée : une fonction $f : \mathrm{D} \to \mathbb{C}$ est dite *bornée* s'il existe un réel $\mathrm{K} \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in \mathrm{D}$ on a $|f(x)| \leqslant \mathrm{K}$.

Ainsi, parmi les énoncés précédents, les **Proposition 1**, **Définition 2**, **Proposition 2**, les opérations sur les limites tant que $\pm\infty$ n'apparaissent pas et la **Proposition 7** restent valables dans le cas complexe. Les autres n'ont plus de sens car ils reposent sur la relation d'ordre de $\mathbb{R}$.

Enfin, l'étude de la limite d'une fonction complexe f peut se ramener à l'étude de la limite des deux fonctions réelles $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ comme le précise le résultat suivant.

Théorème 2 – *Limite d'une fonction complexe et de ses parties réelle et imaginaire*

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathbb{C}$ une fonction, $a \in \overline{\mathrm{D}}$ un point adhérent à D et $\ell \in \mathbb{C}$.
Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $\lim_a f = \ell$

(2) $\lim_a \mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}(\ell)$ et $\lim_a \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(\ell)$

II. Continuité

II. 1. Définition

Définition 3 – *Continuité*

Soit $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Soit $a \in \mathrm{D}$. On dit que f *est continue en* a si $\lim_{a} f$ existe. Dans ce cas, on a nécessairement $\lim_{a} f = f(a)$. Ainsi, f est continue en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathrm{D}, \quad |x - a| \leqslant \eta \implies \left|f(x) - f(a)\right| \leqslant \varepsilon$$

- On dit que f *est continue sur* D si elle est continue en tout point de D.

Notation On notera $\mathscr{C}(\mathrm{D}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles continues sur D.

II. 2. Continuité à gauche et à droite

Définition 4 – *Continuité à gauche et à droite*

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathrm{D}$. On suppose que f est définie à gauche et à droite au voisinage de a.

- On dit que f *est continue à gauche en* a si $f_{|\mathrm{D}\cap]-\infty,a]}$ est continue en a.
- On dit que f *est continue à droite en* a si $f_{|\mathrm{D}\cap[a,+\infty[}$ est continue en a.

Proposition 8 – *Lien entre limite à gauche et à droite et continuité à gauche et à droite*

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathrm{D}$. On suppose que f est définie à gauche et à droite au voisinage de a. Alors :

- f est continue à gauche en a si et seulement si $\lim_{a^-} f = f(a)$.
- f est continue à droite en a si et seulement si $\lim_{a^+} f = f(a)$.
- f est continue en a si et seulement si $\lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f = f(a)$.

Exemple La fonction partie entière $\lfloor \cdot \rfloor$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ mais seulement continue à droite en tout point de $\mathbb{Z}$. En effet, si $n \in \mathbb{Z}$, $\lim_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor = n - 1 \neq n = \lfloor n \rfloor$ et $\lim_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor = n = \lfloor n \rfloor$.

II. 3. Opérations sur la continuité

La notion de continuité reposant sur celle de limite finie, elle hérite des propriétés relatives aux opérations. Les résultats qui suivent sont indifféremment valables pour la continuité en un point ou sur une partie.

- **Combinaison linéaire**
  Toute combinaison linéaire de fonctions continues est continue.
- **Produit**
  Tout produit de fonctions continues est continue.
- **Quotient**
  Tout quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas est continue.
- **Composition**
  Toute composée de fonctions continues est continue.

II. 4. Prolongement par continuité en un point

Théorème 3 – *Théorème de prolongement par continuité*

Soient $D \subset \mathbb{R}$ et $a \in D$. Soit $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
On suppose que $\lim_a f$ existe et est finie.
Dans ce cas, la fonction $\tilde{f}$ définie sur D par :

$$\forall x \in D, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \setminus \{a\} \\ \lim_a f & \text{si } x = a \end{cases}$$

prolonge f sur D et est continue sur D. On l'appelle *le prolongement par continuité de f en a*.

Remarque Même si $\tilde{f}$ et f sont en toute rigueur différentes ($\tilde{f}$ est définie sur D et f sur $D \setminus \{a\}$), il est courant de continuer à noter f le prolongement par continuité de f en a.

Exemple La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \sin x / x$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ puisque $\lim_0 f = 1$.

II. 5. Caractérisation séquentielle de la continuité

Proposition 9 – *Caractérisation séquentielle*

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D$.
Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(1) f est continue en a.

(2) Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans D de limite a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $f(a)$.

Remarque Ce résultat n'est qu'une réécriture du résultat de caractérisation séquentielle de la limite.

II. 6. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 4 – *Théorème des valeurs intermédiaires*

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et $(a, b) \in I^2$.
Alors toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$ sont atteintes par f.

II. 7. Théorème des bornes atteintes

Théorème 5 – *Théorème des bornes atteintes*

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

II. 8. Théorème de la bijection

Théorème 6 – *Théorème de la bijection*

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.
Si f est continue et strictement monotone sur I alors f est bijective de I sur $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$.
Dans ce cas, f^{-1} est continue et strictement monotone de même sens de variation que f sur J.

Exemple La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puisque dérivable avec, pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$.
Ainsi, par application du théorème de la bijection, f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \left]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f\right[= \mathbb{R}$.

II. 9. Extension aux fonctions complexes

De façon similaire au cas des limites, il est possible d'étendre la notion de continuité aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ en prenant comme définition celle de la **Définition 3**.

Les **Définition 4**, **Proposition 8**, les opérations sur la continuité, les **Théorème 3** et **Proposition 9** restent valables dans le cas complexe.

L'étude de la continuité d'une fonction complexe peut se ramener à l'étude de la continuité des deux fonctions réelles $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ comme le précise le résultat suivant.

Théorème 7 – *Continuité d'une fonction complexe et de ses parties réelle et imaginaire*

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathbb{C}$ une fonction et $a \in \mathrm{D}$.
Alors f est continue en a (resp. sur D) si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues en a (resp. sur D).

III. Dérivabilité

III. 1. Définition

Définition 5 – *Dérivabilité*

Soit $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Soit $a \in \mathrm{D}$. On dit que f *est dérivable en* a si le taux d'accroissement τ_a de f en a défini sur $\mathrm{D} \setminus \{a\}$ par :

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

  admet une limite finie lorsque x tend vers a.
  Le cas échéant, cette limite est alors appelée *nombre dérivé de* f *en* a et est notée $f'(a)$.
- On dit que f *est dérivable sur* D si elle est dérivable en tout point de D.
  Dans ce cas, la fonction $x \mapsto f'(x)$ définie sur D est appelée la *dérivée de* f.

Notation On notera $\mathscr{D}(\mathrm{D}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles dérivables sur D.

Remarque – *Interprétation géométrique*
Si f est dérivable en a alors la courbe représentative de f admet au point $(a, f(a))$ une tangente d'équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Le nombre dérivé $f'(a)$ est la pente de cette tangente et s'obtient par définition comme la limite quand x tend vers a des pentes $\tau_a(x)$ des cordes reliant les points $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$.

PROPOSITION 10 – *Dérivabilité implique continuité*

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathrm{D}$.
Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

REMARQUE La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto |x|$ en 0.

III. 2. DÉRIVABILITÉ À GAUCHE ET À DROITE

DÉFINITION 6 – *Dérivabilité à gauche et à droite*

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathrm{D}$. On suppose que f est définie à gauche et à droite au voisinage de a.

- On dit que f ***est dérivable à gauche en a*** si $f_{|\mathrm{D}\cap]-\infty,a]}$ est dérivable en a.
- On dit que f ***est dérivable à droite en a*** si $f_{|\mathrm{D}\cap[a,+\infty[}$ est dérivable en a.

NOTATION Dans le cas où f est dérivable à gauche (resp. à droite) au point a, on notera $f'_g(a)$ (resp. $f'_d(a)$) le nombre dérivé associé.

PROPOSITION 11 – *Lien entre dérivabilité et dérivabilité à gauche et à droite*

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathrm{D}$. On suppose que f est définie à gauche et à droite au voisinage de a.
Alors f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en a avec $f'_g(a) = f'_d(a)$.
Dans ce cas, on a alors $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

III. 3. OPÉRATIONS SUR LA DÉRIVABILITÉ

La notion de dérivabilité reposant sur celle de limite finie, elle hérite des propriétés relatives aux opérations. Les résultats qui suivent sont indifféremment valables pour la dérivabilité en un point ou sur une partie.

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- **Combinaison linéaire**
  Si f et g sont dérivables alors $\lambda f + g$ est dérivable et :
  $$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$$
- **Produit**
  Si f et g sont dérivables alors fg est dérivable et :
  $$(fg)' = f'g + fg'$$
- **Quotient**
  Si $g \neq 0$ et si f et g sont dérivables alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable et :
  $$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathrm{E}$ et $g : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

- **Composition**
  Si f et g sont dérivables alors $g \circ f$ est dérivable et :
  $$(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$$

En ce qui concerne la dérivabilité d'une fonction réciproque, le résultat est le suivant.

Théorème 8 – *Dérivabilité d'une fonction réciproque*

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective d'un intervalle I sur $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$.
Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur J et :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

III. 4. Extrema et dérivabilité

Théorème 9 – *Condition nécessaire pour un extremum local en un point intérieur*

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathrm{D}$ un point intérieur à D.
Si f est dérivable en a et possède un extremum local alors $f'(a) = 0$.

Remarques

- Le point a doit être intérieur à D. En effet, par exemple, la fonction dérivable $f : x \in [0,1] \mapsto x$ possède un extremum (global) en 1 malgré le fait que $f'(1) \neq 0$.
- La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la fonction dérivable $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$ qui ne possède pas d'extremum local en 0 bien que $f'(0) = 0$.

III. 5. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Théorème 10 – *Théorème de Rolle*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ vérifiant $f(a) = f(b)$.
Alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 11 – *Théorème des accroissements finis*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Remarque Géométriquement, cette identité traduit le fait que la tangente au graphe de f au point d'abscisse c est parallèle à la corde joignant les points d'abscisses a et b.

Théorème 12 – *Inégalité des accroissements finis*

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et dérivable sur $\mathring{\mathrm{I}}$.
S'il existe $\mathrm{K} \geqslant 0$ tel que pour tout réel $x \in \mathring{\mathrm{I}}$ l'on a $|f'(x)| \leqslant \mathrm{K}$ alors :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \mathrm{K}|x-y|$$

Remarque Autrement dit, f est K−lipschitzienne sur I.

III. 6. Monotonie et dérivabilité

Théorème 13 – *Lien entre monotonie et dérivabilité*

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et dérivable sur $\mathring{\mathrm{I}}$. Alors :

- f est croissante sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$ sur $\mathring{\mathrm{I}}$.
- f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur $\mathring{\mathrm{I}}$.
- Si $f' > 0$ sur $\mathring{\mathrm{I}}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points où f' s'annule alors f est strictement croissante.

Des résultats analogues peuvent être énoncés pour les fonctions décroissantes.

Remarque Pour ce résultat, le fait que I soit un **intervalle** est crucial. Par exemple, la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ est dérivable et vérifie $f' \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}^*$ sans être décroissante sur $\mathbb{R}^*$. En revanche, elle l'est sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ qui, eux, sont bien des intervalles.

III. 7. Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 14 – *Théorème de la limite de la dérivée*

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et dérivable sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$ pour $a \in \mathrm{I}$. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si f', définie sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$, admet ℓ pour limite en a, alors le taux d'accroissement de f en a défini sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet ℓ pour limite en a.
En particulier, si ℓ est finie, f est donc dérivable en a avec $f'(a) = \ell$.

Remarques

- Dans le cas où ℓ est finie, on a également que f' est continue en a puisque $\lim\limits_a f' = \ell = f'(a)$.
- On se sert souvent de ce résultat sous la forme suivante : si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est continue sur I et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$ et si f' admet une limite finie ℓ en a alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I avec $f'(a) = \ell$.

III. 8. Dérivées d'ordre supérieur

Définition 7 – *Dérivée n−ème*

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction et $n \in \mathbb{N}$.
Par récurrence, on pose $f^{(0)} = f$ et, si $n \geqslant 1$, on dit que f est *n fois dérivable sur* D si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur D et on note $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Notation On notera $\mathscr{D}^n(\mathrm{D}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles n fois dérivables sur D.

Définition 8 – *Classes $\mathscr{C}^n$ et $\mathscr{C}^\infty$*

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction et $n \in \mathbb{N}$.
On dit que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur D lorsqu'elle est n fois dérivable et que $f^{(n)}$ est continue sur D.
On dit que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D lorsqu'elle est de classe $\mathscr{C}^n$ sur D pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Notation On notera $\mathscr{C}^n(\mathrm{D}, \mathbb{R})$ et $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{D}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles de classes $\mathscr{C}^n$ et $\mathscr{C}^\infty$ sur D.

On se donne $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.
De façon analogue au cas de la dérivabilité, la classe $\mathscr{C}^n$ se comporte bien vis-à-vis des opérations usuelles.

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- **Combinaison linéaire**
  Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$ alors $\lambda f + g$ est de classe $\mathscr{C}^n$ et
  $$(\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}$$
- **Produit** – *Formule de Leibniz*
  Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$ alors fg est de classe $\mathscr{C}^n$ et :
  $$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$
- **Quotient**
  Si $g \neq 0$ et si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$ alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^n$.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective d'un intervalle I sur $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$.

- **Réciproque**
  Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ et si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^n$ sur J.

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathrm{E}$ et $g : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

- **Composition**
  Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$ alors $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^n$.

III. 9. Fonctions convexes

Définition 9 – *Fonctions convexes et concaves*

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f est convexe sur I si :
  $$\forall (x_1, x_2) \in \mathrm{I}^2, \quad \forall t \in [0,1], \quad f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$
- On dit que f est concave sur I si :
  $$\forall (x_1, x_2) \in \mathrm{I}^2, \quad \forall t \in [0,1], \quad f(tx_1 + (1-t)x_2) \geqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

Remarque – *Interprétation géométrique*
Lorsque t varie dans $[0,1]$, la quantité $tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$ parcourt le segment d'extrémités $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$ (appelé corde) tandis que la quantité $f(tx_1 + (1-t)x_2)$ parcourt la portion de la courbe représentative de f située entre ces mêmes points. Ainsi f est convexe sur I si sa courbe représentative est située en dessous de ses cordes. Une interprétation similaire peut être faite pour les fonctions concaves.

Proposition 12 – *Lien entre convexité et concavité*

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.
Alors f est convexe sur I si et seulement si $-f$ est concave sur I.

Remarque Ainsi, dans la suite, on énonce les résultats sur la notion de convexité mais il peuvent tous se traduire en termes de concavité en considérant la fonction $-f$.

PROPOSITION 13 – *Convexité d'une fonction dérivable*

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- La fonction f est convexe sur I ;
- Pour tout point $a \in \mathrm{I}$, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f est située au dessus de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point a ;
- La fonction f' est croissante sur I.

EXEMPLES – *Convexité et inégalités classiques*

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ est convexe puisque sa dérivée $f' = f$ est croissante sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, cette fonction est située au-dessus de sa tangente au point 0, à savoir au-dessus de la droite d'équation $y = x+1$. On en déduit l'inégalité classique et à connaître par cœur $e^x \geqslant 1+x$ valable pour $x \in \mathbb{R}$.
- La fonction g définie sur $]-1,+\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x)$ est concave puisque sa dérivée $g' : x \mapsto 1/(x+1)$ est décroissante sur $]-1,+\infty[$. Par conséquent, cette fonction est située en-dessous de sa tangente au point 0, à savoir en-dessous de la droite d'équation $y = x$. On en déduit l'inégalité classique et à connaître par cœur $\ln(1+x) \leqslant x$ valable pour $]-1,+\infty[$.

PROPOSITION 14 – *Convexité d'une fonction deux fois dérivable*

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I.
Alors la fonction f est convexe sur I si et seulement si sa dérivée seconde f'' est positive sur I.

III. 10. EXTENSION AUX FONCTIONS COMPLEXES

De façon similaire au cas de la continuité, il est possible d'étendre la notion de dérivabilité aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ en prenant comme définition celle de la **DÉFINITION 5**.

Les **PROPOSITION 10**, **DÉFINITION 6**, **PROPOSITION 11**, les opérations sur la dérivabilité et le **THÉORÈME 12** restent valables dans le cas complexe.

REMARQUE Le théorème de Rolle n'est plus valable pour les fonctions complexes comme le montre la fonction $f : t \in [0,2\pi] \mapsto e^{it} \in \mathbb{C}$ qui est bien continue sur $[0,2\pi]$, dérivable sur $]0,2\pi[$ avec $f(0) = f(2\pi)$ mais qui ne peut satisfaire $f'(c) = 0$ pour un réel $c \in]0,2\pi[$ puisque $f'(t) = ie^{it} \neq 0$ pour tout $t \in]0,2\pi[$.
En particulier, le théorème des accroissements finis ne l'est plus non plus.

L'étude de la dérivabilité d'une fonction complexe peut se ramener à l'étude de la dérivabilité des deux fonctions réelles $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ comme le précise le résultat suivant.

THÉORÈME 15 – *Dérivabilité d'une fonction complexe et de ses parties réelle et imaginaire*

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathbb{C}$ une fonction et $a \in \mathrm{D}$.
Alors f est dérivable en a si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables en a.

Le cas échéant, on a : $$f'(a) = \mathrm{Re}(f)'(a) + i\,\mathrm{Im}(f)'(a)$$

IV. Analyse asymptotique

IV. 1. Relations de comparaison

Définition 10 – *Relations de comparaison*

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{\mathrm{D}}$ un point adhérent à D. On suppose que g ne s'annule pas sur un voisinage de a sauf peut-être en a et que si $g(a) = 0$ alors $f(a) = 0$.

- On dit que f est *dominée par g au voisinage de a* et l'on écrit $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(g)$ si :
$$\frac{f}{g} \text{ est bornée au voisinage de } a$$
- On dit que f est *négligeable devant g au voisinage de a* et l'on écrit $f \underset{a}{=} o(g)$ si :
$$\lim_a \frac{f}{g} = 0$$
- On dit que f est *équivalente à g au voisinage de a* et l'on écrit $f \underset{a}{\sim} g$ si :
$$\lim_a \frac{f}{g} = 1$$

Remarques

- On peut démontrer que la relation d'équivalence $\sim$ est :
  - symétrique : $f \underset{a}{\sim} g$ équivaut à $g \underset{a}{\sim} f$;
  - transitive : si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$.

  Les relations de domination O et de négligeabilité o sont transitives mais pas symétriques.
- On a $f \underset{a}{\sim} g$ si et seulement si $f - g \underset{a}{=} o(g)$.
- On a f est bornée au voisinage de a si et seulement si $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(1)$ et f tend vers 0 en a si et seulement si $f \underset{a}{=} o(1)$.

IV. 2. Manipulation des équivalents

Proposition 15 – *Limite et équivalent*

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions, $a \in \overline{\mathrm{D}}$ un point adhérent à D et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que g ne s'annule pas sur un voisinage de a sauf peut-être en a et que si $g(a) = 0$ alors $f(a) = 0$.

- Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $\lim_a g = \ell$ alors $\lim_a f = \ell$.
- Si $\lim_a f = \ell$ avec $\ell \neq 0$ alors $f \underset{a}{\sim} \ell$.

Proposition 16 – *Obtention d'un équivalent par encadrement*

Soient f, g, h et w des fonctions définies sur D et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathrm{D}}$ un point adhérent à D. On suppose que w ne s'annule pas sur un voisinage de a sauf peut-être en a et que si $w(a) = 0$ alors $f(a) = h(a) = 0$.
Si l'on a $f \leqslant g \leqslant h$ sur un voisinage de a et $f \underset{a}{\sim} w$ et $h \underset{a}{\sim} w$ alors $g \underset{a}{\sim} w$.

Proposition 17 – *Signe et nullité et équivalent*

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{\mathrm{D}}$ un point adhérent à D. On suppose que g ne s'annule pas sur un voisinage de a sauf peut-être en a et que si $g(a) = 0$ alors $f(a) = 0$.

- Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si g est positive sur un voisinage de a alors f est positive sur un voisinage de a.
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si g ne s'annule pas sur un voisinage de a alors f ne s'annule pas sur un voisinage de a.

Proposition 18 – *Opérations sur les équivalents*

Pour $i \in \{1,2\}$, soient $f_i : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ et $g_i : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ des fonctions et $a \in \overline{\mathrm{D}}$ un point adhérent à D. On suppose que g_i ne s'annule pas sur un voisinage de a sauf peut-être en a et que si $g_i(a) = 0$ alors $f_i(a) = 0$. Soient également $\varphi : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathrm{E}}$.

- **Produit :** Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors :
$$f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$$
- **Puissance :** Si $k \in \mathbb{N}$ et si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ alors :
$$f_1^k \underset{a}{\sim} g_1^k$$
- **Quotient :** Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors :
$$\frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$$
- **Substitution :** Si $\lim\limits_{b} \varphi = a$ et $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ alors :
$$f_1 \circ \varphi \underset{b}{\sim} g_1 \circ \varphi$$

Remarques

- On ne peut pas sommer les équivalents.
Par exemple, $x+1 \underset{+\infty}{\sim} x$ et $-x+2 \underset{+\infty}{\sim} -x+1$ mais l'on a pas $3 \underset{+\infty}{\sim} 1$.
- On ne peut pas composer à gauche dans les équivalents.
Par exemple, $x+1 \underset{+\infty}{\sim} x$ mais l'on a pas $e^{x+1} \underset{+\infty}{\sim} e^x$.

IV. 3. Développements limités

Définition 11 – *Développement limité*

Soit $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{\mathrm{D}}$.
On dit que la fonction f *admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a* (abrégé en $\mathrm{DL}_n(a)$) si il existe des réels a_0, a_1, ..., a_n tels que :
$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \underset{a}{o}((x-a)^n)$$
Le polynôme de degré n défini par $\mathrm{P}(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n$ est appelé *la partie régulière* du développement limité à l'ordre n en a de f.

Remarques

- Si une fonction admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a alors les coefficients a_0, a_1, ..., a_n de la partie régulière sont uniques.

- Une conséquence directe est que si une fonction paire (respectivement impaire) admet une développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a alors les coefficients d'indices impairs (respectivement pairs) sont nuls.

IV. 4. Lien entre régularité et développements limités

Proposition 19 – *Lien entre continuité, dérivabilité et développements limités*

Soit $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathrm{D}$.

- La fonction f admet un $\mathrm{DL}_0(a)$ si et seulement si f est continue en a et dans ce cas :

$$f(x) = f(a) + \underset{a}{o}(1)$$

- La fonction f admet un $\mathrm{DL}_1(a)$ si et seulement si f est dérivable en a et dans ce cas :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{a}{o}(x-a)$$

Théorème 16 – *Théorème de Taylor-Young*

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I avec $a \in \mathrm{I}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I alors f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{a}{o}((x-a)^n)$$

Remarque La réciproque est fausse en général. Par exemple, on pourra vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + x^3 \sin(x^{-2})$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

IV. 5. Obtention de développements limités

En pratique, à partir des développements limités usuels, les opérations sur les développement limités permettent d'obtenir le développement limité de nombreuses fonctions réelles.

IV. 6. Applications des développements limités

Proposition 20 – *Équivalent et développement limité*

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{\mathrm{D}}$ et $0 \leqslant p \leqslant n$.
On suppose que f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ de la forme $f(x) = a_p(x-a)^p + \ldots + a_n(x-a)^n + \underset{a}{o}((x-a)^n)$ avec $a_p \neq 0$.

Alors on a l'équivalent : $$f(x) \underset{a}{\sim} a_p(x-a)^p$$

Proposition 21 – *Position relative d'une courbe et de sa tangente*

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{\mathrm{D}}$ et $p \geqslant 2$.
On suppose que f admet un $\mathrm{DL}_p(a)$ de la forme $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_p(x-a)^p + \underset{a}{o}((x-a)^p)$ avec $a_p \neq 0$.
Alors la courbe représentative de f admet une tangente au point a d'équation $y = a_0 + a_1(x-a)$ et la position de la courbe par rapport à cette tangente est donnée par le signe de $a_p(x-a)^p$ au voisinage de a.

V. Intégration sur un segment

En première année a été introduite l'intégrale de toute fonction f continue sur un segment $[a,b]$ et à valeurs réelles.

V. 1. Propriétés de l'intégrale

Proposition 22 – *Propriétés de l'intégrale*

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$.

- **Linéarité :** Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$.
- **Inégalité triangulaire :** Si $a \leqslant b$, $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$.
- **Relation de Chasles :** Si $c \in [a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Proposition 23 – *Positivité, croissance et nullité*

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$.

- **Positivité :** Si $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$ et si $a \leqslant b$ alors $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$.
- **Croissance :** Si $f \leqslant g$ sur $[a,b]$ et si $a \leqslant b$ alors $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.
- **Nullité :** Si $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$ et si $\displaystyle\int_a^b f = 0$ alors f est nulle sur $[a,b]$.

Remarque Pour la positivité et la croissance, l'ordre des bornes d'intégration est importante. Ainsi, si jamais $a \geqslant b$, l'inégalité du résultat est inversée.

V. 2. Sommes de Riemann

Théorème 17 – *Convergence des sommes de Riemann*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

V. 3. Primitives d'une fonction continue

Définition 12 – *Primitive d'une fonction*

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle *primitive de* f toute fonction $\mathrm{F} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable vérifiant $\mathrm{F}' = f$.

Proposition 24 – *Description des primitives*

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.
Si f possède une primitive F_0 alors les primitives de f sont toutes les fonctions $\mathrm{F}_0 + \mathrm{C}$ pour $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$.

Théorème 18 – *Théorème fondamental de l'analyse*

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et $a \in \mathrm{I}$.

- La fonction f admet une unique primitive sur I qui s'annule en a donnée par la fonction F_a suivante :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{F}_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

  La fonction F_a est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I avec $\mathrm{F}'_a = f$.
- Pour toute primitive F de f sur I on a :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = [\,\mathrm{F}(t)\,]_a^x = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a)$$

Remarque En particulier, si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I on a :

$$\forall (a, x) \in \mathrm{I}^2, \quad f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

V. 4. Calcul d'intégrales

Proposition 25 – *Intégration par parties*

Soient $u : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $v : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I et $(a, b) \in \mathrm{I}^2$. Alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [\,u(t)v(t)\,]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition 26 – *Changement de variable*

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I, $\varphi : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[\,a, b\,]$ avec $\varphi([\,a, b\,]) \subset \mathrm{I}$. Alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

On dit que l'on a effectué le changement de variable $x = \varphi(t)$.

Remarques – *Fonctions paire, impaire et périodique*

Les résultats qui suivent se révèlent très utiles en pratique, ils sont conséquence directe de changement de variable simples, à savoir $t = -u$ et $t = u + \mathrm{T}$.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[\,-a, a\,]$ avec $a > 0$.

- Si f est paire, on a :

$$\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^0 f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et donc} \qquad \int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$$

- Si f est impaire, on a :

$$\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-a}^0 f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et donc} \qquad \int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et T−périodique. Alors on a, pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

V. 5. Formules de Taylor

La formule de Taylor-Young, qui est une formule locale, a été énoncée dans la partie d'analyse asymptotique. La formule de Taylor avec reste intégral, qui est une formule globale, est énoncée ci-après.

Théorème 19 – *Formule de Taylor avec reste intégral*

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I et $(a, x) \in \mathrm{I}^2$. Alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque La formule de Taylor avec reste intégral explicite sous forme intégrale l'erreur commise en approximant f par la partie régulière de son développement limité à l'ordre n en a, moyennant l'hypothèse f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Avec une hypothèse plus faible — f de classe $\mathscr{C}^n$ —, la formule de Taylor-Young stipule que cette erreur tend vers 0 plus vite que $(x-a)^n$.

La formule de Taylor avec reste intégral n'est pas exigible mais permet de prouver facilement l'inégalité de Taylor-Lagrange énoncée ci-après qui, elle, l'est.

Théorème 20 – *Inégalité de Taylor-Lagrange*

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I. On suppose qu'il existe une constante $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$ telle que $\left|f^{(n+1)}\right| \leqslant \mathrm{K}$ sur I. Alors, pour tout $(a, x) \in \mathrm{I}^2$, on a :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leqslant \frac{\mathrm{K}|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

V. 6. Extension aux fonctions complexes

On peut aisément définir l'intégrale d'une fonction f continue sur un segment $[a, b]$ et à valeurs complexes grâce à l'intégrale des fonctions réelles en posant :

$$\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re}(f) + i \int_a^b \mathrm{Im}(f)$$

Dès lors, tous les résultats précédents **excepté** la **Proposition 23** concernant la positivité, croissante et nullité de l'intégrale restent valables dans le cas complexe.