Lycée Descartes
Tours

« FORMULAIRE ASYMPTOTIQUE »

PSI
2024 – 2025

Développements limités et croissances comparées

Développements limités usuels en 0

Fonction exponentielle :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Fonctions hyperboliques :

$$\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

Fonctions puissances :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

Fonctions circulaires :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

Fonction logarithme népérien :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

Fonctions tangente et tangente réciproque :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\operatorname{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

Croissances comparées

Pour les suites :

Si $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $q > 1$ on a :

$$\frac{\ln^\beta n}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \qquad \frac{n^\beta}{q^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \qquad \text{et} \qquad \frac{q^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Pour les fonctions :

Si $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $a > 1$ on a :

$$\frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0, \qquad \frac{x^\beta}{a^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0, \qquad \text{et} \qquad x^\alpha \ln^\beta x \xrightarrow[x\to0^+]{} 0$$