Lycée Descartes
Tours

ALGÈBRE LINÉAIRE

PSI
2024 – 2025

Révisions de première année

Plan du cours

Dans la suite, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et sera appelé l'ensemble des *scalaires*.

I. Espaces vectoriels

Un $\mathbb{K}-$*espace vectoriel* E est un ensemble E muni d'une loi de composition interne sur $\mathrm{E}\times\mathrm{E}$ notée couramment $+$ et d'une loi de composition externe sur $\mathbb{K}\times\mathrm{E}$ notée couramment $\cdot$ vérifiant les huit propriétés suivantes :

- **Associativité de $+$:** $\forall x, y, z \in \mathrm{E}, \quad (x+y)+z = x+(y+z)$;
- **Élément neutre pour $+$:** $\exists\, 0_{\mathrm{E}} \in \mathrm{E}, \quad \forall x \in \mathrm{E}, \quad x + 0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}} + x = x$;
- **Symétrique pour $+$:** $\forall x \in \mathrm{E}, \quad \exists y \in \mathrm{E}, \quad x+y = y+x = 0_{\mathrm{E}}$;
- **Commutativité de $+$:** $\forall x, y \in \mathrm{E}, \quad x+y = y+x$;
- **Distributivité de $\cdot$ sur $\mathbb{K}$:** $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in \mathrm{E}, \quad (\lambda+\mu)\cdot x = \lambda\cdot x + \mu\cdot x$;
- **Distributivité de $\cdot$ sur E :** $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x, y \in \mathrm{E}, \quad \lambda\cdot(x+y) = \lambda\cdot x + \lambda\cdot y$;

- **Associativité de $\cdot$:** $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in \mathrm{E}, \quad \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$;
- **Élément neutre pour $\cdot$:** $\forall x \in \mathrm{E}, \quad 1 \cdot x = x$.

On le note $(\mathrm{E}, +, \cdot)$. Les éléments de E sont appelés *vecteurs*.
L'élément neutre de E est noté 0_E ou 0 lorsque le contexte est clair. Pour ne pas alourdir les notations, si $\lambda \in \mathbb{K}$ est un scalaire et $x \in \mathrm{E}$ est un vecteur de E, on notera la multiplication par un scalaire λx et non $\lambda \cdot x$.

PROPOSITION 1 – *Une règle de calcul importante*

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathrm{E}$.

Alors : $$\lambda x = 0_\mathrm{E} \iff \lambda = 0 \text{ ou } x = 0_\mathrm{E}$$

Un sous-ensemble $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ est un *sous-espace vectoriel* de E si $(\mathrm{F}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille de n vecteurs de E, on appelle *combinaison linéaire* des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ tout vecteur de E qui peut s'écrire sous la forme : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

I. 1. SOUS-ESPACES VECTORIELS

PROPOSITION 2 – *Caractérisation des sous-espaces vectoriels*

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ un sous-ensemble de E.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) F est un sous-espace vectoriel de E.

(2) $0_\mathrm{E} \in \mathrm{F}$ et F est stable par combinaison linéaire : $\forall x, y \in \mathrm{F}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda x + y \in \mathrm{F}$.

REMARQUE Le sens **(2)** $\Longrightarrow$ **(1)** est celui qui est le plus utilisé, il permet de prouver rapidement (sans vérifier les huit axiomes de la définition d'un espace vectoriel !) que F est un sous-espace vectoriel.

PROPOSITION 3 – *Intersection de sous-espaces vectoriels*

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.
Toute intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

REMARQUE – *Union de sous-espaces vectoriels*
Une union de sous-espaces vectoriels n'est pas forcément un sous-espace vectoriel.

PROPOSITION 4 – *Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs*

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.

- L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $x_1, \dots, x_n$, noté $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$:
$$\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \, , \, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$$
est un sous-espace vectoriel de E appelé le *sous-espace vectoriel engendré par la famille* $(x_1, \dots, x_n)$.
- $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est également le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant les vecteurs $x_1, \dots, x_n$.

Remarque Pour démontrer qu'une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel, on peut bien entendu utiliser la caractérisation des sous-espaces vectoriels mais on peut aussi, d'après la proposition précédente, écrire F sous la forme d'un espace vectoriel engendré. Cela se révèle d'ailleurs plus efficace si on cherche par la suite une base de F.

Définition 1 – *Somme de sous-espaces vectoriels*

Soient E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On appelle *somme des sous-espaces vectoriels* F *et* G l'ensemble noté $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ défini par :

$$\mathrm{F}+\mathrm{G}=\{f+g,\ (f,g)\in \mathrm{F}\times\mathrm{G}\}$$

Proposition 5 – *Somme de sous-espaces vectoriels*

Soient E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Alors la somme $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque On peut montrer que $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant les sous-espaces vectoriels F et G.

Définition 2 – *Sous-espaces vectoriels supplémentaires*

Soient E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que les sous-espaces vectoriels F et G sont *supplémentaires* si :

(1) $\mathrm{E}=\mathrm{F}+\mathrm{G}$;

(2) $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}=\{0\}$

Dans ce cas, on note $\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}$ la somme $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ et on dit que la somme est *directe*.

Proposition 6 – *Décomposition et sous-espaces supplémentaires*

Soient E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Les sous-espaces F et G sont supplémentaires si et seulement si :

$$\forall x\in\mathrm{E},\quad \exists!\,(f,g)\in\mathrm{F}\times\mathrm{G},\quad x=f+g$$

I. 2. Familles de vecteurs

Définition 3 – *Famille génératrice*

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $(x_1,\dots,x_n)$ une famille de vecteurs de E.
On dit que la famille $(x_1,\dots,x_n)$ est *génératrice de* E si $\mathrm{E}=\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$.

Définition 4 – *Famille libre, famille liée*

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $(x_1,\dots,x_n)$ une famille de vecteurs de E.
On dit que la famille $(x_1,\dots,x_n)$ est *libre* si :

$$\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\quad \sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k=0_{\mathrm{E}}\quad\Longrightarrow\quad \lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$$

Si la famille n'est pas libre, on dit qu'elle est *liée*.

Remarques

- Par négation de la définition précédente, une famille est liée s'il existe une famille de n scalaires non tous nuls $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ tels que :
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E$$
- Ainsi, une famille est liée si et seulement si l'un au moins de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.
- Si $x \in E$, la famille (x) est libre si et seulement si $x \neq 0_E$.
- Si $x, y \in E$, la famille (x, y) est libre si et seulement si x et y ne sont pas colinéaires.

Exemple – *Cas des familles de polynômes non nuls de degrés échelonnés*
Toute famille $(P_1, \ldots, P_n)$ de polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ non nuls et de degrés deux à deux distincts est libre.

Définition 5 – *Base*

Soient E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.
On dit que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est une *base de* E si elle est libre et génératrice de E.

Théorème 1 – *Décomposition d'un vecteur dans une base*

Soient E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel et $\mathscr{B}(x_1, \ldots, x_n)$ une base de E.

Alors : $$\forall x \in E, \quad \exists! \, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$$

Vocabulaire Les scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sont appelées les *coordonnées* de x dans la base $\mathscr{B}$.

Remarque L'existence de la décomposition précédente découle du fait que $\mathscr{B}$ soit génératrice de E ; l'unicité du fait que $\mathscr{B}$ soit libre.

I. 3. Dimension finie

Définition 6 – *Espace vectoriel de dimension finie*

Soit E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel.
On dit que E est *de dimension finie* s'il possède une famille génératrice finie.
Sinon, on dit qu'il est *de dimension infinie*.

Théorème 2 – *Théorèmes de la base extraite et de la base incomplète*

Soit E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel de dimension finie.

- **Théorème de la base extraite :** De toute famille génératrice finie de E, on peut extraire une base de E.
- **Théorème de la base incomplète :** Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

En particulier, E admet une base.

THÉORÈME 3 – *Dimension*

Soit E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel de dimension finie.
Toutes les bases de E ont le même cardinal n. Cet entier n est appelé la *dimension de* E et est noté $\dim(E)$.

REMARQUE Par convention, $\dim E = 0$ si et seulement si $E = \{0_E\}$.

VOCABULAIRE Soit E est un $\mathbb{K}$− espace vectoriel.
Si $\dim(E) = 1$, on dit que E est une *droite vectorielle*; si $\dim(E) = 2$, on dit que E est un *plan vectoriel*.

PROPOSITION 7 – *Dimension et cardinal des familles libres et génératrices*

Soit E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel de dimension finie n.

- Toute famille génératrice possède au moins n éléments.
- Toute famille libre possède au plus n éléments.

THÉORÈME 4 – *Caractérisation des bases en dimension finie*

Soient E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel de dimension finie n et $\mathscr{B}$ une famille de vecteurs de E.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) La famille $\mathscr{B}$ est une base de E.

(2) La famille $\mathscr{B}$ est libre et $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = n$.

(3) La famille $\mathscr{B}$ est génératrice de E et $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = n$.

THÉORÈME 5 – *Dimension d'un sous-espace vectoriel*

Soient E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.
Alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$ avec égalité si et seulement si $F = E$.

REMARQUE – *Inclusion + égalité des dimensions*
Le théorème précédent montre en particulier que si F est un sous-espace vectoriel de E vérifiant $\dim(F) = \dim(E)$ alors $F = E$. Autrement dit, une inclusion et l'égalité des dimensions implique l'égalité.

THÉORÈME 6 – *Formule de Grassmann*

Soient E un $\mathbb{K}$− espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

On a : $$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

THÉORÈME 7 – *Caractérisation des sous-espaces supplémentaires*

Soient E un $\mathbb{K}$− espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(1) F et G sont supplémentaires dans E.

(2) $E = F + G$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

(3) $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

DÉFINITION 7 – *Rang d'une famille de vecteurs*

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $(x_1,\ldots,x_n)$ une famille de vecteurs de E.
On appelle *rang de la famille* $(x_1,\ldots,x_n)$, noté $\operatorname{rg}(x_1,\ldots,x_n)$, la dimension du sous-espace vectoriel engendré par la famille $(x_1,\ldots,x_n)$:

$$\operatorname{rg}(x_1,\ldots,x_n) = \dim \operatorname{Vect}(x_1,\ldots,x_n)$$

On a $\operatorname{rg}(x_1,\ldots,x_n) \leqslant n$ avec égalité si et seulement si $(x_1,\ldots,x_n)$ est libre.

II. Applications linéaires

Dans toute la suite, E, F et G désigneront des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels.

II. 1. Définition et premières propriétés

DÉFINITION 8 – *Application linéaire*

On appelle *application linéaire de* E *dans* F toute application $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ telle que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x, y \in \mathrm{E}, \quad u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$$

VOCABULAIRE ET NOTATIONS

- On notera $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
- Si u est bijective, on dit que u est un *isomorphisme*.
- Si $\mathrm{E} = \mathrm{F}$ on dit que u est un *endomorphisme de* E ; on note alors $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- Si $\mathrm{E} = \mathrm{F}$ et si u est bijective, on dit que u est un *automorphisme*.

REMARQUE – *Valeur de $u(0_\mathrm{E})$*
On peut montrer que si $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, on a nécessairement $u(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{F}$.

II. 2. Opérations sur les applications linéaires

PROPOSITION 8 – *Opérations sur les applications linéaires*

- **Combinaison linéaire :** Si $u, v \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\lambda u + v \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.
- **Composition :** Si $u \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$ et $v \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ alors $u \circ v \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{G})$.
- **Inverse :** Si $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est bijective alors $u^{-1} \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{E})$.

REMARQUES

- Le fait que l'application nulle de E dans F soit linéaire et le fait que $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ soit stable par combinaison linéaire montre que $(\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.
- La composée de deux applications linéaires étant linéaire et la composée de deux applications bijectives étant bijective, on obtient que la composée de deux isomorphismes est un isomorphisme.

II. 3. Noyau et image d'une application linéaire

PROPOSITION 9 – *Images directe et réciproque d'un sous-espace vectoriel*

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ une application linéaire.

- Si A est un sous-espace vectoriel de E alors $u(\mathrm{A})$ est un sous-espace vectoriel de F.
- Si B est un sous-espace vectoriel de F alors $u^{-1}(\mathrm{B})$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 9 — *Noyau et image*

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ une application linéaire.

- On appelle *noyau de u* et on note $\operatorname{Ker} u$ l'ensemble :
$$\operatorname{Ker} u = \{x \in \mathrm{E},\ u(x) = 0_\mathrm{F}\}$$
- On appelle *image de u* et on note $\operatorname{Im} u$ l'ensemble :
$$\operatorname{Im} u = \{u(x),\ x \in \mathrm{E}\}$$

Remarque D'après la proposition précédente, étant donné que $\operatorname{Ker} u = u^{-1}(\{0_\mathrm{F}\})$ et $\operatorname{Im} u = u(\mathrm{E})$, les noyau et image de u sont des sous-espaces vectoriels de E et F respectivement.

Théorème 8 — *Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité à l'aide du noyau et de l'image*

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ une application linéaire.

- u est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \{0_\mathrm{E}\}$.
- u est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} u = \mathrm{F}$.

Proposition 10 — *Famille génératrice de l'image*

Soient $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ une application linéaire et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E.
Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice de E alors $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est génératrice de $\operatorname{Im} u$.

Autrement dit : $$\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$$

Remarque — *Détermination pratique du noyau et de l'image*
En pratique, pour déterminer le noyau d'une application linéaire $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, on résout l'équation $u(x) = 0$ d'inconnue le vecteur $x \in \mathrm{E}$ et, pour déterminer l'image, on utilise souvent le résultat précédent, c'est-à-dire que l'on écrit $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ où $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de E.

II. 4. Bases et applications linéaires

Proposition 11 — *Caractérisation de l'injectivité – surjectivité – bijectivité par l'image d'une base*

Soient $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ une application linéaire et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

- f est injective si et seulement si $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est libre.
- f est surjective si et seulement si $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est génératrice de F.
- f est bijective si et seulement si $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une base de F.

Proposition 12 — *Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base*

Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\left(f_1, \ldots, f_n\right)$ une famille de vecteurs de F.
Alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ telle que :
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad u(e_i) = f_i$$

Théorème 9 – *Détermination d'une application linéaire sur des sous-espaces supplémentaires*

Soient E et E' deux $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
Si $v \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{E}')$ et $w \in \mathscr{L}(\mathrm{G},\mathrm{E}')$ alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{E}')$ telle que :

$$u_{|\mathrm{F}} = v \quad \text{et} \quad u_{|\mathrm{G}} = w$$

Le théorème précédent permet de définir deux transformations géométriques essentielles pour la suite, à savoir les projections et les symétries.

Définition 10 – *Projecteur, symétrie*

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

- On appelle *projection sur* F *parallèlement à* G l'unique endomorphisme p de E tel que :

$$\forall x \in \mathrm{F}, \quad p(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathrm{G}, \quad p(x) = 0$$

- On appelle *symétrie par rapport à* F *parallèlement à* G l'unique endomorphisme s de E tel que :

$$\forall x \in \mathrm{F}, \quad s(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathrm{G}, \quad s(x) = -x$$

Remarque – *Autre caractérisation*
On rappelle que si $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ alors :

- L'endomorphisme u est un projecteur si et seulement si $u \circ u = u$ et que le cas échéant u est la projection sur $\mathrm{F} = \mathrm{Im}(u)$ parallèlement à $\mathrm{G} = \mathrm{Ker}(u)$.
- L'endomorphisme u est une symétrie si et seulement si $u \circ u = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ et que le cas échéant u est la symétrie par rapport à $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ parallèlement à $\mathrm{G} = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$.

Espaces isomorphes On rappelle que les $\mathbb{K}-$espaces vectoriels E et F sont dits *isomorphes* si il existe un isomorphisme de E dans F. Si E et F sont de dimension finie, c'est le cas si et seulement si $\dim(\mathrm{E}) = \dim(\mathrm{F})$.

II. 5. Théorème du rang

Définition 11 – *Rang d'une application linéaire*

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ une application linéaire.
On dit que u est *de rang fini* si son image $\mathrm{Im}\, u$ est de dimension finie.
Dans ce cas, on appelle *rang de* u, noté $\mathrm{rg}\, u$, la dimension de $\mathrm{Im}\, u$.

Remarques – *Deux conditions suffisantes pour être de rang fini*

- Si E est de dimension finie alors u est de rang fini et l'on a $\mathrm{rg}\, u \leqslant \dim(\mathrm{E})$ avec égalité si et seulement si l'application u est injective.
- Si F est de dimension finie alors u est de rang fini et l'on a $\mathrm{rg}\, u \leqslant \dim(\mathrm{F})$ avec égalité si et seulement si l'application u est surjective.

Proposition 13 – *Invariance du rang par composition avec un isomorphisme*

Soient $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $v \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$ deux applications linéaires.

- Si u est un isomorphisme et v de rang fini alors $v \circ u$ est de rang fini et $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}\, v$.
- Si v est un isomorphisme et u de rang fini alors $v \circ u$ est de rang fini et $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}\, u$.

THÉORÈME 10 – *Théorème du rang*

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ une application linéaire. On suppose E de dimension finie.

Alors : $$\dim(\mathrm{E}) = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg} u$$

REMARQUE Ainsi les noyau et image d'une application linéaire sont fortement liés : connaissant la dimension de l'un, on peut retrouver la dimension de l'autre.

THÉORÈME 11 – *Application linéaire entre espaces de mêmes dimensions finies*

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ une application linéaire. On suppose E et F de dimensions finies avec $\dim(\mathrm{E}) = \dim(\mathrm{F})$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) u est injective. **(2)** u est surjective. **(3)** u est bijective.

REMARQUE Si E est de dimension finie, ce théorème s'applique en particulier aux endomorphismes de E puisque dans ce cas l'on a $\mathrm{E} = \mathrm{F}$.

II. 6. ÉQUATIONS LINÉAIRES

PROPOSITION 14 – *Résolution d'une équation linéaire*

Soient $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $b \in \mathrm{F}$. On cherche à résoudre l'équation $u(x) = b$ d'inconnue $x \in \mathrm{E}$ et on notera $\mathscr{S}$ l'ensemble de ses solutions.

- Si $b \notin \operatorname{Im} u$, $\mathscr{S} = \emptyset$;
- Si $b \in \operatorname{Im} u$, on se donne $x_0 \in \mathrm{E}$ un antécédent de b par u, c'est-à-dire que $u(x_0) = b$. Alors :

$$\mathscr{S} = \left\{x_0 + y,\ y \in \operatorname{Ker} u\right\}$$

Le vecteur x_0 est appelé *solution particulière* de l'équation.

REMARQUE Les équations linéaires recouvrent de nombreux cas d'étude courante : équations différentielles linéaires, équations de suites récurrentes linéaires, systèmes linéaires,...
La technique de résolution est alors toujours la même et repose sur la proposition précédente :

(1) On commence par résoudre l'équation homogène $u(x) = 0_\mathrm{F}$: c'est-à-dire que l'on décrit $\operatorname{Ker} u$;
(2) On poursuit en cherchant une solution particulière de l'équation : on cherche $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $u(x_0) = b$;
(3) On conclut enfin en disant que toute solution de l'équation est la somme de la solution particulière x_0 et d'une solution de l'équation homogène $y \in \operatorname{Ker} u$.

III. Matrices

Dans la suite, n, p et q seront des entiers naturels non nuls et les espaces vectoriels E, F et G seront supposés de dimensions finies.

On notera $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On utilisera la notation $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ ou encore $\mathrm{A} = (a_{i,j})$ pour introduire une matrice A et spécifier ses coefficients.
Lorsque $n = p$, l'ensemble des matrices carrées de taille n est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice *identité* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est notée I_n.

Vecteurs lignes et vecteurs colonnes Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ que l'on écrit sous la forme :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$, on appelle :

- $i-$*ème vecteur ligne de* A le vecteur $(a_{i,1}, \dots, a_{i,p})$ de $\mathbb{K}^p$;
- $j-$*ème vecteur colonne de* A le vecteur $(a_{1,j}, \dots, a_{n,j})$ de $\mathbb{K}^n$.

Transposition Si $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une matrice, on appelle *transposée* de A la matrice notée $\mathrm{A}^\mathrm{T} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par $\mathrm{A}^\mathrm{T} = (a_{j,i})$.
On rappelle que l'application $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{A}^\mathrm{T}$ est linéaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, que si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors $\left(\mathrm{A}^\mathrm{T}\right)^\mathrm{T} = \mathrm{A}$ et que si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ alors $({}^\mathrm{T}\mathrm{AB}) = \mathrm{B}^\mathrm{T}\mathrm{A}^\mathrm{T}$.

Base canonique de l'espace des matrices Si $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$ on note $\mathrm{E}_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de celui de la $i-$ème ligne et de la $j-$ème colonne qui vaut 1.
On rappelle que la famille $(\mathrm{E}_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ est une base, dite *canonique*, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. En particulier $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$.

Matrices inversibles Une matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *inversible* s'il existe une matrice $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie $\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$.
Dans ce cas, la matrice B est unique, notée A^{-1}, et est appelée *l'inverse* de la matrice A.
L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et est appelé *groupe linéaire*.
Si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont inversibles alors AB est inversible avec $(\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$. De plus, si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible alors A^T est inversible avec $\left(\mathrm{A}^\mathrm{T}\right)^{-1} = \left(\mathrm{A}^{-1}\right)^\mathrm{T}$.
On rappelle que dans la définition d'une matrice inversible il faut *a priori* vérifier que $\mathrm{AB} = \mathrm{I}_n$ **et** $\mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$ mais que l'on peut démontrer qu'une des deux identités suffit en fait à affirmer que A est inversible et que $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{B}$.

Matrices triangulaires Si $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une matrice, on dit que A est *triangulaire supérieure* (resp. *triangulaire inférieure*) dès que, pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a $a_{i,j} = 0$ pour $i > j$ (resp. $i < j$). Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est triangulaire supérieure (resp. inférieure) et les coefficients diagonaux du produit sont les produits des coefficients diagonaux.
On rappelle qu'une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls et que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est supérieure (resp. inférieure).

Matrices diagonales Si $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une matrice, on dit que A est *diagonale* dès que, pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a $a_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$. Le produit de deux matrices diagonales est diagonale et les coefficients diagonaux du produit sont les produits des coefficients diagonaux.
On rappelle qu'une matrice diagonale est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls et que l'inverse d'une matrice diagonale est diagonale de coefficients diagonaux les inverses des coefficients diagonaux.

Proposition 15 – *Formule du binôme de Newton*

Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices qui commutent, c'est-à-dire que $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$.

Alors :
$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \quad (\mathrm{A}+\mathrm{B})^\ell = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \mathrm{A}^k\mathrm{B}^{\ell-k}$$

Remarque – *C'est l'occasion de rappeler que le produit matriciel n'est pas commutatif !*

III. 1. Matrice d'une application linéaire

Définition 12 – *Matrice d'une application linéaire*

Soient $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ une application linéaire et $\mathscr{E} = (e_1,\dots,e_p)$ et $\mathscr{F} = (f_1,\dots,f_n)$ des bases respectives de E et F.

On appelle *matrice de u dans les bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$* et on note $\mathrm{M}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u)$ la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les colonnes contiennent les coordonnées des vecteurs $u(e_1),\dots,u(e_p)$ dans la base $\mathscr{F} = (f_1,\dots,f_n)$ de F.

Si : $\quad \forall j \in [\![1,p]\!], \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i$

alors la matrice $\mathrm{M}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u)$ est représentée ci-contre.

$$\mathrm{M}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u(e_1) & \cdots & u(e_j) & \cdots & u(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{array}$$

Remarque Le nombre de lignes n est la dimension de l'espace d'arrivée et le nombre de colonnes p est la dimension de l'espace de départ.

Remarque – *Dimension de $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$*

On peut vérifier que l'application $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) \mapsto \mathrm{M}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ réalise un isomorphisme. Ainsi $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont isomorphes et l'on a en particulier $\dim(\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})) = \dim(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$.

Remarque – *Cas d'un endomorphisme*

Lorsque $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, les espaces de départ et d'arrivée étant les mêmes, on choisit souvent la même base $\mathscr{E}$ de E au départ et à l'arrivée pour écrire la matrice représentant u. Cette dernière est alors notée $\mathrm{M}_{\mathscr{E}}(u)$.

Notation – *Matrice colonne associée à un vecteur*

Soit $\mathscr{E} = (e_1,\dots,e_p)$ une base de E. Si $x \in \mathrm{E}$, on notera $\mathrm{M}_{\mathscr{E}}(x)$ la matrice colonne de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ constituée des coordonnées $(x_1,\dots,x_p)$ de x dans la base $\mathscr{E}$:

$$\mathrm{M}_{\mathscr{E}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Proposition 16 – *Calcul matriciel de l'image d'un vecteur*

Soient $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ une application linéaire et $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ des bases respectives de E et F.

Si $x \in \mathrm{E}$, alors : $\quad \mathrm{M}_{\mathscr{F}}(u(x)) = \mathrm{M}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u) \times \mathrm{M}_{\mathscr{E}}(x)$

III. 2. Points de vue vectoriel et matriciel

Proposition 17 – *Relations entre applications linéaires et matrices*

- Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ des bases respectives de E et F. On suppose $\dim(\mathrm{E}) = p$ et $\dim(\mathrm{F}) = n$.
  L'application $u \mapsto \mathrm{M}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u)$ est un isomorphisme de $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
  En particulier, si $u, v \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :

$$\mathrm{M}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(\lambda u + v) = \lambda \mathrm{M}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u) + \mathrm{M}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(v)$$

- Soient $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ des bases respectives de E, F et G.
  Si $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $v \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$ alors :

$$\mathrm{M}_{\mathscr{E},\mathscr{G}}(v \circ u) = \mathrm{M}_{\mathscr{F},\mathscr{G}}(v) \times \mathrm{M}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u)$$

- Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ des bases respectives de E et F. On suppose que E et F ont même dimension. Alors $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est bijective si et seulement si $\mathrm{M}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u)$ est inversible et l'on a alors :

$$(\mathrm{M}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u))^{-1} = \mathrm{M}_{\mathscr{F},\mathscr{E}}(u^{-1})$$

Définition 13 – *Application linéaire canoniquement associée à une matrice*

Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice.
L'*application linéaire canoniquement associée à la matrice* A est l'application $u : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ définie par :

$$\forall \left(x_1,\dots,x_p\right) \in \mathbb{K}^p, \quad u\left(\left(x_1,\dots,x_p\right)\right) = \left(y_1,\dots,y_n\right) \quad \text{avec} \quad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j$$

En identifiant $\mathbb{K}^q$ et $\mathscr{M}_{q,1}(\mathbb{K})$, u est l'application $\mathrm{X} \in \mathbb{K}^p \mapsto \mathrm{AX} \in \mathbb{K}^n$.
En notant $\mathscr{B}_p$ et $\mathscr{B}_n$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$, on a $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_p,\mathscr{B}_n}(u) = \mathrm{A}$.

Remarque – *Noyau et image d'une matrice*

Si $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle *noyau* et *image* de la matrice A les noyau et image de l'application linéaire canoniquement associée à A. On les note $\operatorname{Ker} \mathrm{A}$ et $\operatorname{Im} \mathrm{A}$. Autrement dit, on a :

$$\operatorname{Ker} \mathrm{A} = \left\{\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ \mathrm{AX} = 0\right\} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} \mathrm{A} = \left\{\mathrm{AX},\ \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})\right\}$$

III. 3. Changements de bases

Définition 14 – *Matrice de passage*

Soient $\mathscr{E} = \left(e_1,\dots,e_p\right)$ et $\mathscr{E}' = (e'_1,\dots,e'_p)$ deux bases de E.

On appelle *matrice de passage de la base $\mathscr{E}$ à la base $\mathscr{E}'$* et on note $\mathrm{P}_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}'}$ la matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ dont les colonnes contiennent les coordonnées des vecteurs $e'_1,\dots,e'_p$ dans la base $\mathscr{E} = \left(e_1,\dots,e_p\right)$ de E.

Si : $$\forall j \in [\![1,p]\!], \quad e'_j = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} e_i$$

alors la matrice $\mathrm{P}_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}'}$ est représentée ci-contre.

$$\mathrm{P}_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e'_1 & \cdots & e'_j & \cdots & e'_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,j} & \cdots & a_{p,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_p \end{array}$$

Proposition 18 – *Inversibilité d'une matrice de passage*

Soient $\mathscr{E} = \left(e_1,\dots,e_p\right)$ et $\mathscr{E}' = (e'_1,\dots,e'_p)$ deux bases de E.
Alors la matrice de passage $\mathrm{P}_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}'}$ est inversible et son inverse est la matrice de passage $\mathrm{P}_{\mathscr{E}'}^{\mathscr{E}}$.

Proposition 19 – *Changement de base pour un vecteur*

Soient $\mathscr{E} = \left(e_1,\dots,e_p\right)$ et $\mathscr{E}' = (e'_1,\dots,e'_p)$ deux bases de E et $x \in \mathrm{E}$.
En posant $\mathrm{X} = \mathrm{M}_{\mathscr{E}}(x)$, $\mathrm{X}' = \mathrm{M}_{\mathscr{E}'}(x)$ et $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}'}$, on a :

$$\mathrm{X} = \mathrm{PX}'$$

Proposition 20 – *Changement de base pour une application linéaire*

Soient $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ une application linéaire, $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ deux bases de E et $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ deux bases de F.
En posant $\mathrm{M} = \mathrm{M}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u)$, $\mathrm{M}' = \mathrm{M}_{\mathscr{E}',\mathscr{F}'}(u)$, $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}'}$ et $\mathrm{Q} = \mathrm{P}_{\mathscr{F}}^{\mathscr{F}'}$, on a :

$$\mathrm{M}' = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{M}\mathrm{P}$$

Proposition 21 – *Changement de base pour un endomorphisme*

Soient $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme et $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ deux bases de E.
En posant $\mathrm{M} = \mathrm{M}_{\mathscr{E}}(u)$, $\mathrm{M}' = \mathrm{M}_{\mathscr{E}'}(u)$ et $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}'}$, on a :

$$\mathrm{M}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}\mathrm{P}$$

Définition 15 – *Matrices semblables*

Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices.
On dit que les matrices A et B sont *semblables* s'il existe une matrice $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P}$, c'est-à-dire si A et B représentent un même endomorphisme dans deux bases.

Remarque On peut vérifier que la relation « être semblable » est une relation symétrique, c'est-à-dire que A est semblable à B si et seulement si B est semblable à A, et transitive, c'est-à-dire que si A est semblable à B qui elle-même est semblable à C alors A est semblable à C.

III. 4. Rang d'une matrice

Définition 16 – *Rang d'une matrice*

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *rang* de A, noté $\mathrm{rg}\,\mathrm{A}$, le rang de la famille des vecteurs colonnes de A dans $\mathbb{K}^n$.

Proposition 22 – *Rang d'une application linéaire et rang d'une matrice associée*

Soient $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ une application linéaire et $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ des bases respectives de E et F.

Alors :
$$\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg}\left(\mathrm{M}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u)\right)$$

Remarque En particulier, le rang d'une matrice égale celui de son application linéaire canoniquement associée.

Proposition 23 – *Propriétés du rang d'une matrice*

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors :

- Le rang de A est égal au rang de sa transposée : $\mathrm{rg}\,\mathrm{A} = \mathrm{rg}\,\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$.
  Par conséquent, le rang de A est également le rang de la famille des vecteurs lignes de A dans $\mathbb{K}^p$.
- Le rang de A est inchangé par multiplication – à droite ou à gauche – par une matrice inversible.
- Si $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors A est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}\,\mathrm{A} = n$, c'est-à-dire si et seulement si les vecteurs colonne de la matrice A forment une base de $\mathbb{K}^n$.

III. 5. Opérations élémentaires sur les matrices

Les opérations élémentaires présentées dans la suite peuvent être réalisées sur une matrice ou sur un système linéaire.

Définition 17 – *Opérations élémentaires sur les lignes*

Soient $i, j \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On appelle *opération élémentaire sur les lignes* l'une des trois opérations suivantes :

- **échange** des i−ème et j−ème lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$.
- **multiplication** de la i−ème ligne par $\lambda \neq 0$: $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
- **addition** de la j−ème ligne multipliée par λ à la i−ème ligne : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Remarque – *Opérations élémentaires sur les colonnes*
Une définition analogue peut être donnée pour les opérations élémentaires sur les colonnes.

Vocabulaire Deux matrices A et A' ou deux systèmes linéaires $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont dits *équivalents par lignes* (resp. *par colonnes*) si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes (resp. sur les colonnes).

Proposition 24 – *Propriétés conservées par les opérations élémentaires*

- Deux matrices équivalentes par lignes ou par colonnes ont le même rang.
- Deux systèmes linéaires équivalents par lignes ou par colonnes ont le même ensemble de solutions.

Définition 18 – *Matrices élémentaires*

Soient $i \in [\![1, n]\!]$, $j \in [\![1, p]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit les matrices de :

- **permutation** : $P_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$.
- **dilatation** : $D_i(\lambda) = I_n - E_{i,i} + \lambda E_{i,i}$.
- **transvection** : $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$.

Toutes ces matrices sont inversibles.

Proposition 25 – *Traduction matricielle des opérations élémentaires*

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $i \in [\![1, n]\!]$, $j \in [\![1, p]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Faire l'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$ sur les lignes de A revient à faire le produit matriciel $P_{i,j}A$.
- Faire l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i$ sur les lignes de A revient à faire le produit matriciel $D_i(\lambda)A$.
- Faire l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ sur les lignes de A revient à faire le produit matriciel $T_{i,j}(\lambda)A$.

Remarque Dans le cas des opérations sur les lignes, le produit par la matrice élémentaire est effectué à gauche. On peut bien sûr énoncer un résultat similaire pour les opérations sur les colonnes mais dans ce cas le produit par la matrice élémentaire est effectué à droite.

Méthode du pivot de Gauss La méthode du pivot de Gauss permet, à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, d'échelonner une matrice. On se donne $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Si $A = 0$, A est déjà échelonnée et l'échelonnement est terminé.
- Quitte à permuter deux colonnes, on suppose que la première colonne de A est non nulle.
- Quitte à permuter deux lignes, on suppose que le coefficient $a_{1,1}$ en haut à gauche de A est non nul.
- Grâce au *pivot* $a_{1,1}$, on annule par transvection sur les lignes tous les éléments situés en dessous de lui. On arrive à une matrice du type :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

- On itère alors le procédé sur la sous-matrice A'.

Le résultat final de l'échelonnement est donné par le théorème suivant.

Théorème 12 – *Échelonnement d'une matrice*

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Il est possible, en utilisant uniquement des opérations élémentaires sur les lignes **et** les colonnes, de transformer la matrice A en une matrice *échelonnée* de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \star & \cdots\cdots & & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \alpha_r & \star \cdots & \star \\ \vdots & & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix}$$

avec $r \in \mathbb{N}$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \neq 0$ des scalaires tous non nuls appelés les *pivots*. On a alors $\operatorname{rg} A = r$.

Dans le cas où la matrice est inversible, la première colonne de A n'est jamais nulle et on peut opérer uniquement sur les lignes ou uniquement sur les colonnes. De plus, on peut se servir de chaque pivot pour annuler par transvection les coefficients situés au dessus. Enfin, par dilatation, on peut transformer chaque pivot en un 1.

Théorème 13 – *Échelonnement d'une matrice inversible*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. Alors A est équivalente par lignes (**ou** par colonnes) à la matrice I_n.

III. 6. Applications des opérations élémentaires

Calcul du rang d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice.
La méthode du pivot de Gauss permet de transformer A sous la forme échelonnée du **Théorème 12**. Le rang de A est alors le nombre de pivots.

Calcul de l'inverse d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible.
D'après le **Théorème 13**, il est possible de passer de A à I_n par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes.
Autrement dit, avec la **Proposition 25**, il existe des matrices élémentaires $O_1, \ldots, O_k$ telles que :

$$I_n = O_k \cdots O_1 A$$

On en déduit que $A^{-1} = O_k \cdots O_1$, que l'on peut aussi écrire $A^{-1} = O_k \cdots O_1 I_n$, ce qui signifie que les opérations élémentaires qui nous ont permis de passer de A à I_n permettent également de passer de I_n à A^{-1}.
En pratique, on commence par écrire côte à côte les matrices A et I_n et on applique sur A **et** sur I_n les opérations élémentaires qui permettent de passer de A à I_n :

$$O_1, \ldots, O_k \quad \begin{matrix} A \\ \downarrow \\ I_n \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} I_n \\ \downarrow \\ A^{-1} \end{matrix} \quad O_1, \ldots, O_k$$

Lorsque la matrice de gauche est transformée en I_n, celle de droite est A^{-1}.

Remarque Une autre façon de calculer l'inverse de A est de résoudre le système linéaire d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et de second membre $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ donné par $AX = Y$. En effet, A étant inversible, ce système admet une unique solution donnée par $X = A^{-1}Y$. La résolution du système permet donc de déduire l'expression de A^{-1}.

Résolution d'un système linéaire

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ une matrice colonne.
On s'intéresse à la résolution du système linéaire d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et de *second membre* B donné par $AX = B$, c'est-à-dire au système $\mathscr{S}$ suivant :

$$(\mathscr{S})\quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

D'après le **Théorème 12**, on peut utiliser la méthode du pivot de Gauss et effectuer des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de ce système pour transformer le système $\mathscr{S}$ en le système échelonné $\mathscr{S}'$ suivant :

$$(\mathscr{S}')\quad \left\{\begin{array}{cccccccc} \alpha_{1,1}x'_1 + & \alpha_{1,2}x'_2 + & & \cdots & & + \alpha_{1,p}x'_p & = & \beta_1 \\ & \alpha_{2,2}x'_2 + & & \cdots & & + \alpha_{2,p}x'_p & = & \beta_2 \\ & & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ & & & \alpha_{r,r}x'_r + & \ldots & + \alpha_{r,p}x'_p & = & \beta_r \\ & & & & & 0 & = & \beta_{r+1} \\ & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & 0 & = & \beta_n \end{array}\right.$$

où les $x'_1, \ldots, x'_p$ sont les $x_1, \ldots, x_p$ à l'ordre près et où $\alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{r,r} \neq 0$ avec $r = \mathrm{rg} A = \mathrm{rg}\mathscr{S}$ sont les *pivots*. Les opérations élémentaires ont également été faites sur le second membre B d'où le changement de notation $b \longrightarrow \beta$.
Rappelons que $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$ ont le même ensemble de solutions.
Une fois que le système est sous une forme échelonnée, il est facile de le résoudre. Les différents cas possibles sont les suivants :

- Si $r < n$ et s'il existe $k \in [\![r+1, n]\!]$ tel que $\beta_k \neq 0$:
  Le système n'a pas de solution puisque l'une des *équations de compatibilité* n'est pas satisfaite.
- Si $r = n$ ou si $\beta_k = 0$ pour tout $k \in [\![r+1, n]\!]$:
  - Si $r = p$:
    Le système a une unique solution que l'on détermine en « remontant » le système qui est alors sous forme *triangulaire*.
  - Si $r < p$:
    Le système a une infinité de solutions. Les inconnues $x'_{r+1}, \ldots, x'_p$ sont les *inconnues auxiliaires* et deviennent des paramètres. On les passe dans le second membre et on « remonte » le système pour obtenir l'expression des *inconnues principales* $x'_1, \ldots, x'_r$ en fonction du second membre et des inconnues auxiliaires. L'ensemble des solutions est alors un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ de dimension $p - r$.

Remarque – *Système de Cramer*

Le système $AX = B$ est compatible, c'est-à-dire admet des solutions, si et seulement si $B \in \mathrm{Im}(A)$.
Lorsque A est inversible, on dit que le système est *de Cramer*. Dans ce cas, il admet une unique solution donnée par $X = A^{-1}B$.

IV. Déterminants

IV. 1. Définition

Théorème 14 – *Existence et unicité du déterminant*

Il existe une unique application $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

(1) f est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable ;

(2) f est *alternée* par rapport aux colonnes de sa variable, c'est-à-dire que si A admet deux colonnes identiques alors $f(\mathrm{A}) = 0$;

(3) $f(\mathrm{I}_n) = 1$.

Pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle *déterminant de* A et on note $\det(\mathrm{A})$ le scalaire $f(\mathrm{A})$.

Remarque – *Caractère alterné et antisymétrie*

On dit que $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est *antisymétrique* par rapport aux colonnes de sa variable lorsque, si $\mathrm{A}' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ s'obtient à partir de $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ en permutant deux de ses colonnes, on a $f(\mathrm{A}') = -f(\mathrm{A})$.
On peut prouver que, si f est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable, alors f est alternée si et seulement si f est antisymétrique.

IV. 2. Propriétés du déterminant

Proposition 26 – *Opérations élémentaires et déterminant*

Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On échange deux colonnes de A et on note A′ la matrice obtenue. Alors $\det(\mathrm{A}') = -\det(\mathrm{A})$.
- On multiplie une colonne de A par λ et on note A′ la matrice obtenue. Alors $\det(\mathrm{A}') = \lambda \det(\mathrm{A})$.
- On ajoute à une ligne de A une autre de ses lignes multipliée par λ et on note A′ la matrice obtenue. Alors $\det(\mathrm{A}') = \det(\mathrm{A})$.

Proposition 27 – *Déterminant d'une matrice triangulaire.*

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses termes diagonaux.

Proposition 28 – *Opérations et déterminant*

Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- **Produit par un scalaire :** $\det(\lambda \mathrm{A}) = \lambda^n \det(\mathrm{A})$.
- **Produit :** $\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A}) \det(\mathrm{B})$.
- **Transposition :** $\det(\mathrm{A}^\mathrm{T}) = \det(\mathrm{A})$.
- **Inverse :** A est inversible si et seulement si $\det(\mathrm{A}) \neq 0$. Le cas échéant, on a $\det(\mathrm{A}^{-1}) = (\det(\mathrm{A}))^{-1}$.

IV. 3. Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 19 – *Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base*

Soient $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.

On appelle *matrice de la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{E}$* et on note $\mathrm{M}_{\mathscr{E}}(\mathscr{F})$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes contiennent les coordonnées des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ dans la base $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de E.

Si : $\forall j \in [\![1, n]\!], \quad x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$

alors la matrice $\mathrm{M}_{\mathscr{E}}(\mathscr{F})$ est représentée ci-contre.

$$\mathrm{M}_{\mathscr{E}}(\mathscr{F}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} x_1 & \cdots & x_j & \cdots & x_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}$$

On appelle alors *déterminant de la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{E}$*, noté $\det_{\mathscr{E}}(\mathscr{F})$, le déterminant $\det(\mathrm{M}_{\mathscr{E}}(\mathscr{F}))$.

Proposition 29 – *Caractérisation des bases par le déterminant*

Soient $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.
Alors $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathscr{E}}(\mathscr{F}) \neq 0$.

IV. 4. Développement d'un déterminant

Proposition 30 – *Développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne*

Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice.
Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, on notera $\mathrm{A}_{i,j} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue à partir de A en ôtant la i–ème ligne et la j–ème colonne. Alors, si $i_0, j_0 \in [\![1, n]\!]$, on a :

- **Développement par rapport à la ligne i_0 :**

$$\det(\mathrm{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} (-1)^{i_0+j} \det(\mathrm{A}_{i_0,j})$$

- **Développement par rapport à la colonne j_0 :**

$$\det(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j_0} (-1)^{i+j_0} \det(\mathrm{A}_{i,j_0})$$

Remarque – *Calcul du déterminant d'une matrice*

Afin de calculer un déterminant, les deux outils les plus importants en pratique sont les **opérations élémentaires** et le **développement par rapport à une ligne ou une colonne**. Les opérations élémentaires peuvent permettre :

- de mettre en valeur deux lignes ou colonnes égales, auquel cas le déterminant est nul ;
- de pouvoir mettre en facteur un scalaire sur une ligne ou une colonne afin de simplifier le déterminant ;
- d'installer de nombreux zéros dans le déterminant en vue d'un développement par rapport à une une ligne ou une colonne ;
- de rendre le déterminant triangulaire.

IV. 5. Déterminant d'un endomorphisme

Proposition 31 – *Déterminant d'un endomorphisme*

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme et $\mathscr{E}$ une base de E.
Le scalaire $\det(\mathrm{M}_{\mathscr{E}}(u))$ ne dépend pas de la base $\mathscr{E}$ de E choisie. On appelle *déterminant de u*, noté $\det(u)$, le déterminant de la matrice de u dans n'importe quelle base de E.

Proposition 32 – *Opérations et déterminant — version endomorphisme*

Soient $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $v \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ deux endomorphismes et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- **Produit par un scalaire :** $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$.
- **Composition :** $\det(v \circ u) = \det(v)\det(u)$.
- **Inverse :** u est bijective si et seulement si $\det(u) \neq 0$. Le cas échéant, on a $\det(u^{-1}) = (\det(u))^{-1}$.