RÉVISIONS D'ANALYSE

T.D. N°0A

Exercice 1 ●○○ — *Échauffement*

1. Résoudre l'équation suivante sur $\mathbb{R}$:
$$x^3+x^2+x=-\frac{1}{3}$$

2. Résoudre l'équation suivante sur $\mathbb{R}$:
$$\sqrt{6-x}+\sqrt{3-x}=\sqrt{5+x}+\sqrt{4-3x}$$

3. Résoudre l'équation suivante sur $\mathbb{R}$:
$$\ln\left(\frac{x+5}{2}\right)=\frac{1}{2}(\ln x+\ln 5)$$

4. Résoudre le système suivant sur $\mathbb{R}^2$:
$$\begin{cases}\operatorname{ch} x+\operatorname{ch} y &= 4\\ \operatorname{sh} x+\operatorname{sh} y &= 1\end{cases}$$

5. Résoudre l'équation suivante sur $[0,\pi]$:
$$2\sin x=\sqrt{1-\sin 2x}+\sqrt{1+\sin 2x}$$

6. Résoudre l'équation suivante sur $\mathbb{R}$:
$$\cos x=1+\sqrt{3}\sin x$$

7. Résoudre l'équation suivante sur $\mathbb{R}$:
$$\operatorname{Arccos} x=\operatorname{Arcsin} 2x$$

8. Résoudre les deux équations suivantes sur $\mathbb{C}$:

   A. $z^2=1+i\sqrt{3}$ B. $z^2+(1-2i)z-2i=0$

9. Résoudre l'équation $(1+iz)^5=(1-iz)^5$ sur $\mathbb{C}$ de deux façons différentes .
En déduire la valeur de $\tan(\pi/5)$.

10. Pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{\pi/2+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$ et $n\in\mathbb{N}$, simplifier la somme suivante :
$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(kx)}{\cos^k x}$$

Exercice 2 ●●○ — *Somme et différence d'arctangentes*

1. Pour $a>0$ et $b>0$, démontrer que :
$$\operatorname{Arctan}(a)-\operatorname{Arctan}(b)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$$

2. En déduire la limite suivante :
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$$

3. Pour $a,b\in\,]-1,1[$, établir une formule analogue à celle de la question **1.** pour $\operatorname{Arctan}(a)+\operatorname{Arctan}(b)$.

4. En déduire la valeur de :
$$S=5\operatorname{Arctan}\frac{1}{8}+2\operatorname{Arctan}\frac{1}{18}+3\operatorname{Arctan}\frac{1}{57}$$

Exercice 3 ●●○ — *Limites de suites*

Déterminer, si elle existe, la limite de la suite (u_n) définie par :

1. $u_n=\dfrac{\sin(n^2)}{\sqrt{n}}$

2. $u_n=\dfrac{3^n+n^2(-1)^n}{n!+\cos(n)\ln(n^2)}$

3. $u_n=\dfrac{2^n-3^n}{2^n+3^{n+1}}$

4. $u_n=\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2+n+3}$

5. $u_n=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \quad (x\in\mathbb{R})$

6. $u_n=\left(5\sin\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{5}\cos n\right)^n$

7. $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\frac{k}{k+n^2}$

8. $u_n=\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor \quad (x\in\mathbb{R})$

9. $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{-1}$

Exercice 4 ●●○ *Suite définie par une somme*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}, \qquad v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}} \qquad \text{et} \qquad w_n = u_n - 2\sqrt{n}$$

1. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$$

2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.
3. Établir que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 5 ●●○ *Suite récurrente complexe*

On donne $u_0 \in \mathbb{C}$ et on impose la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n - \overline{u_n}}{3}$$

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6 ●●○ *Suite de Fibonacci*

On pose $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = 1$ et on impose la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n$$

1. Exprimer ϕ_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
2. Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi_{n+1}^2 - \phi_n \phi_{n+2} = (-1)^n$$

3. Prouver que la suite $(\phi_{n+1}/\phi_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et déterminer sa limite.
4. Démontrer que :

a. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \phi_k = \phi_{2n}$

b. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \phi_k = -\phi_n$

Exercice 7 ●●○ *Suite récurrente linéaire d'ordre 2 avec second membre*

On pose $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et on impose la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 10u_{n+1} - 21u_n + 12n$$

Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 ●●○ *Suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$*

Dans les cas suivants, étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pourra s'intéresser à la bonne définition et aux valeurs possibles de la suite, à sa monotonie et à son éventuelle convergence.

1. On pose $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}$$

2. On pose $u_0 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$$

3. On donne $u_0 \in \left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n - \frac{2}{9}}$$

Exercice 9 ●●○ — *Étude d'une suite récurrente avec vitesse de convergence*

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en se donnant $u_0 \in \mathbb{R}$ puis en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\cos(u_n)$$

1. Prouver qu'il existe un unique réel ℓ tel que $\ell = \frac{1}{2}\cos(\ell)$ et montrer que $\ell \in [0,1]$.
2. Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0 - \ell|$$

3. Conclure quant à l'éventuelle convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Proposer un programme `Python` qui, étant donné un entier $k \in \mathbb{N}$, renvoie une approximation de ℓ à 10^{-k} près.

Exercice 10 ●●○ — *Une série alternée*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

1. En étudiant les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Déterminer la valeur de la limite.
On pourra remarquer que :

$$\forall k \geqslant 1, \quad \frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 11 ●○○ — *Inégalités classiques*

Démontrer les inégalités suivantes :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad |\sin x| \leqslant |x|$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\quad e^x \geqslant 1 + x$.
3. Pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $\quad \ln(1+x) \leqslant x$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad \cos(x) \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$.
5. Pour tout $x \in [0,\pi/2]$, $\quad \sin(x) \geqslant \dfrac{2x}{\pi}$.

Exercice 12 ●●○ — *Suite définie implicitement*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ en posant $f_n(x) = x^n e^{-x} - 1$ pour $x \geqslant 0$.

1. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 3$, l'équation $e^x = x^n$ admet une unique solution, notée x_n, dans l'intervalle $[0,n]$.
2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, $x_n \geqslant 1$.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante et en déduire qu'elle converge vers un réel noté ℓ.
4. Montrer que $\ln(x_n) = \dfrac{x_n}{n}$ et en déduire la valeur de ℓ.
5. Donner un équivalent de $\ln(x_n)$ puis de $x_n - 1$.

Exercice 13 ●●○ — *Existence de solution à une équation*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne n réels $a_1,\dots,a_n$ vérifiant $a_1 + \cdots + a_n = 0$.
Prouver que l'équation suivante d'inconnue x a au moins une solution sur $]0,1[$:

$$\sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = 0$$

Exercice 14 ●●○ — *Dérivées successives*

Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.
2. Déterminer deux fonctions polynomiales non nulles p et q telles que :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad p(x)f'(x) + q(x)f(x) = 0$$

3. En déduire, pour $n \geqslant 1$, une relation vérifiée par $f^{(n+1)}$, $f^{(n)}$ et $f^{(n-1)}$.
4. Pour $p \in \mathbb{N}$, calculer $f^{(2p)}(0)$.
5. Démontrer qu'il existe une suite de polynômes $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-1,1[, \quad f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{P}_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

6. Obtenir avec ce qui précède une relation entre P_{n+1}, P_n et P_{n-1} pour $n \geqslant 1$.

Exercice 15 ●●○ — *Prolongement de classe $\mathscr{C}^1$*

On définit une fonction f sur $]-\pi/2,\pi/2[\setminus\{0\}$ en posant :

$$\forall x \in]-\pi/2,\pi/2[\setminus\{0\}, \quad f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$$

1. Démontrer que f peut se prolonger en une fonction continue sur $]-\pi/2,\pi/2[$.
2. Le prolongement est-il de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\pi/2,\pi/2[$?

Exercice 16 ●○○ — *Développements limités*

Dans les cas suivants, donner le développement de la fonction f au point a à l'ordre n :

1. $f(x) = \ln(e^{2x} + 2e^x + 3)$ avec $a = 0$ et $n = 2$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{1+\cos x}$ avec $a = 0$ et $n = 4$.
3. $f(x) = \ln(1+x^2)$ avec $a = 1$ et $n = 2$.
4. $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1+x}{1+2x}\right)$ avec $a = 0$ et $n = 3$.

Exercice 17 ●○○ — *Étude asymptotique*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \sqrt{x(x+1)}$$

1. Réaliser un développement asymptotique à trois termes de f au voisinage de $+\infty$.
2. Interpréter graphiquement ce développement.

Exercice 18 ●●○ — *Limites de suites*

Déterminer, si elle existe, la limite de la suite (u_n) définie par :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$
2. $u_n = \dfrac{1}{n}\left(n!\dbinom{2n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$
3. $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 19 ●○○ *Calcul d'intégrales*

Calculer les deux intégrales suivantes en réalisant le changement de variable indiqué :

1. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t + \tan t}$ $\quad (u = \cos t)$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t+1}{e^t+e^{-t}}\,\mathrm{d}t$ $\quad (u = e^t)$

Exercice 20 ●●○ *Limites de suites*

Déterminer, si elle existe, la limite de la suite (u_n) définie par :

1. $\displaystyle u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle u_n = \int_0^{\pi} \frac{n\sin x}{x+n}\,\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle u_n = \int_0^1 \sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x$

Exercice 21 ●●● *Étude d'une fonction*

Soit f la fonction définie par sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner une expression de sa dérivée.
2. Prouver que f admet 0 pour limite en $+\infty$.
   On pourra réaliser une intégration par parties puis majorer l'intégrale.
3. Étudier la limite de f en 0.
   On pourra commencer par s'intéresser à la limite quand x tend vers 0 de :

$$\int_x^{2x} \frac{\cos t - 1}{t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 22 ●●● *Des inéquations différentielles*

On souhaite déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des fonctions f définies et continues sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$\forall x \geqslant 0, \quad f(x) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \geqslant 0, \quad f(x) \leqslant \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Soit f un élément de $\mathscr{E}$. Étudier les variations de la fonction auxiliaire suivante :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

   En déduire que f est nulle.
2. Donner l'ensemble $\mathscr{E}$.
3. Soit K une fonction définie, continue et positive sur $\mathbb{R}_+$.
   Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des fonctions f définies et continues sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$\forall x \geqslant 0, \quad f(x) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \geqslant 0, \quad f(x) \leqslant \int_0^x \mathrm{K}(t) f(t)\,\mathrm{d}t$$