Exercice 1

3. L'équation est bien définie ssi $|x|>0$ et $|x+1|>0$, c'est-à-dire ssi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1\} = D$. Pour $x \in D$:

$$\ln|x| + \ln|x+1| = 0 \iff \ln |x||x+1| = 0$$
$$\iff |x||x+1| = 1$$

On procède alors comme à la question 1) en raisonnant sur $]-\infty;-1]$, $]-1,0]$ et $]0,+\infty[$. On trouve finalement : $\mathcal{S} = \left\{ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} ; \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right\}$

4. Grâce à la formule d'addition de la tangente (utilisée deux fois), on a :

$$\tan\left(\text{Arctan}\left(\tfrac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\tfrac{1}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\tfrac{1}{8}\right)\right)$$

$$= \frac{\tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right)\right)}{1 - \tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right)\right)}$$

$$= \frac{1/2 + \frac{1/5 + 1/8}{1 - 1/5 \, 1/8}}{1 - 1/2 \cdot \frac{1/5 + 1/8}{1 - 1/5 \, 1/8}} = 1 \qquad (*)$$

Or, par croissance et positivité de Arctan sur $\mathbb{R}^+$:

$$0 \leq \text{Arctan}\left(\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{\leq \frac{1}{\sqrt{3}}}\right) + \text{Arctan}\left(\underbrace{\tfrac{1}{5}}_{\leq \frac{1}{\sqrt{3}}}\right) + \text{Arctan}\left(\underbrace{\tfrac{1}{8}}_{\leq \frac{1}{\sqrt{3}}}\right) < 3 \cdot \text{Arctan}\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi $\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) \in]-\pi/2, \frac{\pi}{2}[$ et :

$$\text{Arctan}\left(\tan\left(\text{Arctan}\left(\tfrac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\tfrac{1}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\tfrac{1}{8}\right)\right)\right) =$$

$$\text{Arctan}\left(\tfrac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\tfrac{1}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\tfrac{1}{8}\right)$$

On obtient donc la relation souhaitée en appliquant Arctan à $(*)$ puisque $\text{Arctan}(1) = \pi/4$.

7.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Grâce aux formules de trigonométrie :

$$\cos(x) - \cos(2x) = \sin(3x)$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(2\cdot\frac{3x}{2}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sin\left(\frac{3x}{2}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad 3\frac{x}{2} \in \pi\mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad x \in \frac{2\pi}{3}\mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = \pm\frac{3x}{2} \; [2\pi]$$

$$\Longleftrightarrow \quad x \in \frac{2\pi}{3}\mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x \equiv \frac{\pi}{4} \, [\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{2} \, [2\pi]$$

12.

On calcule le discriminant $\Delta = \left(-(3+4i)\right)^2 - 4\cdot(-1+5i)$

$$= 9 + 24i - 16 + 4 - 20i$$

$$= -3 + 4i \neq 0.$$

On cherche une racine carrée de Δ, c'est-à-dire $(a,b) \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(a+ib)^2 = -3+4i$$

En identifiant parties réelle et imaginaire et module, il vient :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = 4 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$$

On trouve que $a = 1$ et $b = 2$ conviennent.

On conclut que les deux racines (distinctes) de l'équation sont :

$$z_1 = \frac{3+4i + 1+2i}{2} = 2+3i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{3+4i - 1-2i}{2} = 1+i$$

Exercice 2

6. On a, pour $n \geqslant 1$:

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} a^{-b^{-k}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{a^{b^{-k}}} = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{a}\right)^{\left(\frac{1}{b}\right)^k}$$

$$= \left(\frac{1}{a}\right)^{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{b}\right)^k}$$

On suppose dans la suite que $a > 0$ pour que $\frac{1}{a} > 0$, ce qui assure la bonne définition de $\left(\frac{1}{a}\right)^{\left(\frac{1}{b}\right)^k} = e^{\left(\frac{1}{b}\right)^k \ln\left(\frac{1}{a}\right)}$.

- Si $1/b = 1$ i.e. si $b = 1$

$$u_n = \left(\frac{1}{a}\right)^n \xrightarrow[n\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } a > 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \\ +\infty & \text{si } 0 < a < 1 \end{cases}$$

- Si $b \neq 1$

$$u_n = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{b} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{b}\right)^n}{1 - 1/b}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{b-1}\left(1 - \left(\frac{1}{b}\right)^n\right)}$$

On a $\frac{1}{b-1}\left(1 - \left(\frac{1}{b}\right)^n\right) \xrightarrow[n\infty]{} \begin{cases} \frac{1}{b-1} & \text{si } |b| > 1 \\ +\infty & \text{si } 0 < b < 1 \end{cases}$

avec une limite qui n'existe pas si $-1 \leqslant b < 0$

On en déduit que $(u_n)_n$ ne cvg pas si $-1 \leqslant b < 0$

et que :

si $0 < b < 1$ $\quad u_n \xrightarrow[n\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } a > 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \\ +\infty & \text{si } 0 < a < 1 \end{cases}$

si $|b| > 1$ $\quad u_n \xrightarrow[n\infty]{} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{b-1}}$

Exercice 5

1. On démontre par récurrence que : $\forall n \geqslant 0,\ u_n \geqslant 1$.

I On a $u_0 \geqslant 1$ par hypothèse.

H Si on a $u_n \geqslant 1$ pour un entier n alors :

$$u_{n+1} = 1 + \underbrace{\ln(\underbrace{u_n}_{\geqslant 1})}_{\geqslant 0} \geqslant 1$$

D'où le résultat.

Soit $g : x \longmapsto 1 + \ln(x) - x$ définie sur $[1, +\infty[= I$.

La fonction g est dérivable sur I et : $\forall x \in I,\ g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

Ainsi $g' \leqslant 0$ sur I et g est donc décroissante sur I. Comme $g(1) = 0$, on obtient que $g \leqslant 0$ sur I.

En particulier, cela donne : $\forall n \in \mathbb{N},\ g(u_n) \leqslant 0$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n.$$

La suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée par 1 : elle converge vers un réel ℓ par le théorème de la limite monotone.

Par passage à la limite dans la relation de récurrence, il vient :

$$\ell = 1 + \ln(\ell) \iff g(\ell) = 0.$$

Or g est continue et strictement décroissante ($g' < 0$ sur $]1, +\infty[$) sur I, donc g est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $]\lim\limits_{+\infty} g, g(1)] =]-\infty; 0]$.

Puisque $0 \in]-\infty, 0]$, $g(\ell) = 0$ admet une unique solution sur I.

Avec $g(1) = 0$, on conclut que $\ell = 0$.

2.

On a $u_0 = 1/2 \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (1-u_{n-1})^2 \geq 0$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

Soit $g : x \longmapsto (1-x)^2 - x = 1 - 3x + x^2$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

Après étude de signe de g, on a :

x	0		φ		$+\infty$
g		$-$	0	$+$	

où $\varphi = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ est l'unique solution de $g(x) = 0$ sur $\mathbb{R}^+$.

On prouve par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, \varphi]$.

I $u_0 = 1/2 \in [0, \varphi]$

H On suppose que $u_n \in [0, \varphi]$ pour un entier n.

Par étude de $f : x \longmapsto (1-x)^2$, on a, puisque $\varphi > 1$:

x	0		1		φ
f	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	φ

$\longleftarrow f(\varphi) = \varphi$ car $g(\varphi) = 0$

On en déduit que $f([0,\varphi]) \subset [0,\varphi]$ puisque $\varphi > 1$.

Comme $u_n \in [0,\varphi]$, il vient $u_{n+1} = f(u_n) \in [0,\varphi]$.

La fonction g étant négative sur $[0,\varphi]$, il vient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) \leq 0$

$\iff \forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.

La suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée par 0 : elle converge vers un réel ℓ par le théorème de la limite monotone.

Par passage à la limite dans la relation de récurrence, il vient :

$$\ell = (1-\ell)^2 \iff g(\ell) = 0 \iff \ell = \varphi \quad (\text{car } \ell \geq 0)$$

Ainsi $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

Exercice 7

1. On peut deviner une valeur de M qui convient en essayant de prouver le résultat par récurrence. On pose par exemple :

$$M = \max(|u_0|, |u_1|, 2)$$

On a ainsi $|u_0| \leq M$.

On prouve ensuite par récurrence que $|u_n| \leq M$ pour $n \geq 1$.

Initialisation : On a $|u_1| \leq M$ par définition de M.

Hérédité : On suppose $|u_n| \leq M$ pour un $n \geq 1$.

Dès lors :
$$\begin{aligned} |u_{n+1}| &= \left|1 + \frac{u_n}{n+1}\right| \\ &\leq 1 + \frac{|u_n|}{n+1} && \text{inégalité triangulaire} \\ &\leq 1 + \frac{M}{2} && \text{car } |u_n| \leq M \text{ et } n \geq 1 \\ &\leq M && \text{car } 2 \leq M \iff \frac{M}{2} \geq 1 \iff M \geq 1 + \frac{M}{2} \end{aligned}$$

Cela permet bien de justifier que $|u_n| \leq M$ pour tout $n \geq 1$.
Le résultat étant aussi vérifié pour $n = 0$, cela conclut la question.

2.

- Puisque $(u_n)_n$ est bornée par la question précédente, on a :

$$u_{n+1} = 1 + \underbrace{\frac{u_n}{n+1}}_{\xrightarrow[n\infty]{} 0} \xrightarrow[n\infty]{} 1$$

Ainsi $u_n \xrightarrow[n\infty]{} 1$.

- On écrit ensuite, pour $n \geq 1$: $u_n - 1 = \frac{u_{n-1}}{n+1} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n+1} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

car $u_{n-1} \xrightarrow[n\infty]{} 1$

Cela donne $u_n = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

- Enfin, on a pour $n \geq 1$:

car $u_n - 1 \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

$$u_{n+1} - 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{u_n - 1}{n+1} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{(n+1)^2}$$

Ainsi $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

et $\boxed{u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).}$

Exercice 8

1. Voir la preuve du thm. spécial des séries alternées...

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \int_0^1 t^{k-1}\,dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=1}^{n+1} (-t)^{k-1}\,dt$$

$p = k-1$

$$= \int_0^1 \sum_{p=0}^{n} (-t)^p\,dt$$

somme de termes géométriques

$$= \int_0^1 \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - (-1)^{n+1} \underbrace{\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt}_{= I_n}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, par positivité et croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt \leq \int_0^1 t^{n+1}\,dt = \frac{1}{n+2}$$

Par encadrement, on en déduit $I_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

La suite $((-1)^{n+1})_{n\geq 0}$ étant bornée, $(-1)^{n+1} I_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Finalement, $u_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$.

Exercice 9

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction sinus est C^0 sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$.

Par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0,x[$ tel que :

$$\sin(x) - \sin(0) = \sin'(c)(x-0) = \cos(c) \cdot x$$

Cela donne :

$$|\sin x| = |\sin x - \sin(0)| = |\cos(c)\, x| \underset{|\cos| \leqslant 1}{\leqslant} |x|$$

2. La fonction $f : x \mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$ (sa dérivée seconde est positive sur $\mathbb{R}^+$) donc sa courbe représentative est au dessus de toutes ses tangentes, en particulier celle au point d'abscisse $x = 0$.

Cela donne : $\forall x \geqslant 0, \quad f(x) \geqslant f'(0)(x-0) + f(0)$

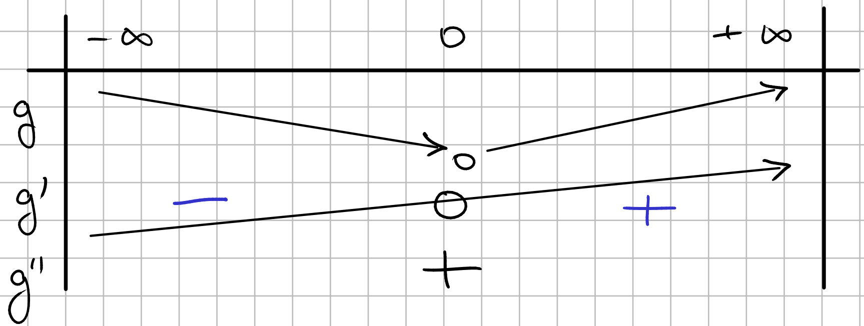
soit : $\forall x \geqslant 0, \quad e^x \geqslant x + 1$

3. Même technique que 2. ($x \mapsto \ln(1+x)$ est concave sur $]-1, +\infty[$)...

4. On pose $g : x \mapsto \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -\sin x + x \quad$ et $\quad g''(x) = 1 - \cos x$



Par étude de variations, on obtient bien : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \geqslant 0$

soit : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos x \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$

5. Même technique qu'en 2. (Sinus est concave sur $[0, \pi/2]$).

Exercice 10

La fonction f est C^1 sur $\mathbb{R}_*^+ \setminus \{1\}$ par produit et quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions $\mathcal{C}^1$.

Continuité au point 1 On a par un équivalent usuel

$$\left(\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u \implies \ln(u) \underset{1}{\sim} u - 1 \right)$$

$$f(x) = \frac{(x+1)\ln x}{2(x-1)} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{2\cdot(x-1)}{2(x-1)} = 1 = f(1).$$

Ainsi $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} f(1)$ et f est continue en 1.

Classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$ $\quad f$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+ \setminus \{1\}$ et C^0 sur $\mathbb{R}_*^+$.

De plus, on a : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_*^+ \setminus \{1\}, \quad f'(x) = \dfrac{\left(\frac{x+1}{x} + \ln x\right) 2(x-1) - 2(x+1)\ln x}{4(x-1)^2}$

$$= \frac{(x-1) + \frac{x-1}{x} - 2\ln x}{2(x-1)^2}$$

$$= \frac{x - 1/x - 2\ln x}{2(x-1)^2}$$

Or, au voisinage de 1, par développement limité :

$$\begin{aligned} x - 1/x - 2\ln x &= x - 1/x - 2\left((x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)\right) \\ &= -x + 2 - 1/x + (x-1)^2 + o((x-1)^2) \\ &= -\frac{1}{x}\left(x^2 - 2x + 1\right) + (x-1)^2 + o((x-1)^2) \\ &= -\frac{(x-1)^2}{x} + (x-1)^2 + o((x-1)^2) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$f'(x) = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{2} + o(1) \xrightarrow[x\to 1]{} 0$$

On en déduit par théorème limite de la dérivée que f est C^1 sur $\mathbb{R}_*^+$ (avec $f'(1) = 0$).

Exercice 11

La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{e^t - 1}{t^2}$ est C^0 sur $\mathbb{R}_*^+$.

Ainsi, le théorème fondamental de l'analyse donne que :

$$F : u \longmapsto \int_1^u f(t)\,dt$$

est C^0 (et même $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}_*^+$.

Par la relation de Chasles, on a :

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \int_1^{ax} f(t)\,dt - \int_1^{bx} f(t)\,dt = F(ax) - F(bx)$$

F, $x \mapsto ax$ et $x \mapsto bx$ étant C^0 sur $\mathbb{R}^+_*$, on obtient que g est C^0 sur $\mathbb{R}^+_*$.

La fonction $\tilde{f} : t \longmapsto \dfrac{e^t - 1 - t}{t^2}$ est C^0 sur $\mathbb{R}^+$ puisque C^0 sur $\mathbb{R}^+_*$

avec $\tilde{f}(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{t^2/2}{t^2} = \dfrac{1}{2}$ et donc prolongeable par C^0 en 0.

Ainsi, le théorème fondamental de l'analyse donne que :

$$\tilde{F} : u \longmapsto \int_0^u \tilde{f}(t)\,dt$$

est C^0 sur $\mathbb{R}^+$.

On écrit alors :

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{e^t - 1 - t + t}{t^2}\,dt$$

$$= \int_{ax}^{bx} \tilde{f}(t)\,dt + \int_{ax}^{bx} \frac{dt}{t}$$

$$= \tilde{F}(bx) - \tilde{F}(ax) + \ln(bx) - \ln(ax)$$

$$= \tilde{F}(bx) - \tilde{F}(ax) + \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Comme $\tilde{F}$ est C^0 en 0, on a $\tilde{F}(u) \xrightarrow[u \to 0]{} \tilde{F}(0) = 0$

Ainsi $g(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ et il est donc bien possible de prolonger g par continuité en 0 en posant $g(0) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

Exercice 12

1. Il suffit de poser : $K = \dfrac{f(x)}{(x - x_1) \cdots (x - x_n)}$

2. La fonction φ s'annule en $x_1, \dots, x_n$ et en x d'après 1.
Grâce au théorème de Rolle appliqué sur chacun des n segments que l'on peut constituer avec les réels $x_1, \dots, x_n, x$, on obtient que φ' s'annule n fois sur I. En itérant ce procédé, on a que $\varphi^{(n)}$ s'annule une fois sur I disons en $\xi \in I$.

On a donc $\varphi^{(n)}(\xi) = 0$ ce qui, après calculs, se réécrit :

$$f^{(n)}(\xi) - n!\,K = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

Exercice 13

1. On a : $x \longmapsto \sqrt{x}$ qui est C^∞ sur $\mathbb{R}_*^+$ et $x \longmapsto 1-x^2$ qui est C^∞ sur $[0,1[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$. Par composée puis inverse d'une fonction ne s'annulant pas, f est C^∞ sur $]-1,1[$.

2. Soit $x \in [0,1[$. On a :

$$f'(x) = -\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2} = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{1-x^2} f(x)$$

Ainsi : $\quad (1-x^2) f'(x) = x f(x)$

3. Soit $n \geqslant 2$. On dérive n fois la relation précédente en se servant de la formule de Leibniz. Pour $x \in [0,1[$, cela donne en notant $p(x) = 1-x^2$ et $q(x) = -x$

$$(pf' + qf)^{(n)}(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (pf')^{(n)}(x) + (qf)^{(n)}(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{p^{(k)}}_{\substack{=0 \text{ si } k\geqslant 3 \\ (d^\circ p = 2)}} (f')^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{q^{(k)}}_{\substack{=0 \text{ si } k\geqslant 2 \\ (d^\circ q = 1)}} f^{(n-k)}(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \binom{n}{0} p^{(0)}(x) f^{(n+1)}(x) + \binom{n}{1} p'(x) f^{(n)}(x) + \binom{n}{2} p''(x) f^{(n-1)}(x)$$
$$+ \binom{n}{0} q^{(0)}(x) f^{(n)}(x) + \binom{n}{1} q'(x) f^{(n-1)}(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-x^2) f^{(n+1)}(x) + - 2nx f^{(n)}(x) - n(n-1) f^{(n-1)}(x)$$
$$- x f^{(n)}(x) - n f^{(n-1)}(x) = 0$$

$$\iff (1-x^2) f^{(n+1)}(x) - (2n+1)x f^{(n)}(x) - n^2 f^{(n-1)}(x) = 0$$

4. Simple vérification après calcul de f''.

5. On procède par récurrence double.

Initialisation On a directement :

$$\forall x \in [0,1[, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad f'(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} \geqslant 0$$

Hérédité On suppose que $f^{(n-1)} \geqslant 0$ et $f^{(n)} \geqslant 0$ pour un $n \geqslant 1$.

On a alors :

$$\forall x \in [0,1[, \quad f^{(n+1)}(x) = \frac{\overbrace{(2n+1)}^{\geqslant 0}\overbrace{x}^{\geqslant 0}\overbrace{f^{(n)}(x)}^{\geqslant 0} + \overbrace{n^2}^{\geqslant 0}\overbrace{f^{(n-1)}(x)}^{\geqslant 0}}{\underbrace{1-x^2}_{\geqslant 0}} \geqslant 0$$

D'où le résultat par principe de récurrence.

Exercice 14

Pour $p \geqslant 1$ et $q \in \mathbb{N}$, on réalise une IPP :

$$I_{p,q} = \int_a^b \underbrace{(x-a)^p}_{u} \underbrace{(b-x)^q}_{v'} dx = \left[(x-a)^p \cdot - \frac{(b-x)^{q+1}}{q+1} \right]_a^b - \int_a^b p(x-a)^{p-1} \cdot - \frac{(b-x)^{q+1}}{q+1} dx$$

$$= \frac{p}{q+1} I_{p-1,q+1}$$

En itérant, cela donne facilement :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad I_{p,q} = \frac{p!}{(q+1)(q+2)\cdots(p+q)} \underbrace{I_{0,p+q}}_{= \frac{(b-a)^{p+q+1}}{p+q+1}}$$

$$= \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!} (b-a)^{p+q+1}$$

Exercice 15

1. On réalise le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ sur W_n pour $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt = \int_{\pi/2}^{0} \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right)(-du) = \int_0^{\pi/2} \sin^n u \, du = \widehat{W}_n .$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On réalise une intégration par parties sur W_{n+2} :

$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos t}_{u'} \cdot \underbrace{\cos^{n+1} t}_{v} \, dt = \left[\sin t \cos^{n+1} t\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin t \cdot (n+1)(-\sin t) \cos^n t \, dt$$

$$= (n+1) \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^2 t}_{= 1 - \cos^2 t} \cdot \cos^n t \, dt$$

$$= (n+1)(W_n - W_{n+2}).$$

Cela donne la relation souhaitée.

3. Soit $p \in \mathbb{N}$. En itérant la relation précédente, il vient :

$$W_{2p} = \frac{2p-1}{2p} W_{2p-2} = \frac{(2p-1)(2p-3)}{(2p)(2p-2)} W_{2p-4}$$

on multiplie en haut et bas par $(2p)(2p-2)\cdots 2$

$$= \dots = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{(2p)(2p-2)\cdots 2} W_0$$

$$= \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}$$

On peut ensuite prouver rigoureusement cette expression par récurrence.

De même, on trouve :

$$W_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

4. En multipliant la relation de la question 2. par W_{n+1}, on obtient que la suite $((n+1)W_n W_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. Étant donné que son premier terme est $1 \cdot W_0 W_1 = \pi/2$, cela donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1) W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$$

5.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $\forall t \in [0, \pi/2]$, $\cos^n t \geqslant \cos^{n+1} t \geqslant \cos^{n+2} t$, ce qui donne $W_n \geqslant W_{n+1} \geqslant W_{n+2}$ en intégrant de 0 à $\pi/2$ par croissance de l'intégrale.

6.

On divise l'encadrement précédent par W_n (qui est non nul) et on utilise la question 2.. On obtient :

$$1 \xleftarrow[n\infty]{} \left[1 \geqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \geqslant \frac{n+1}{n+2}\right] \xrightarrow[n\infty]{} 1$$

Par théorème d'encadrement, il vient : $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \xrightarrow[n\infty]{} 1$.

7.

La question précédente donne $W_{n+1} \underset{n\infty}{\sim} W_n$.

On utilise alors la relation de la question 4. pour obtenir :

$$n W_n^2 \underset{n\infty}{\sim} (n+1) W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi $\dfrac{n W_n^2}{\pi/2} \xrightarrow[n\infty]{} 1$ donc $\dfrac{\sqrt{n}\sqrt{W_n^2}}{\sqrt{\pi/2}} \xrightarrow[n\infty]{} 1$

Soit $\sqrt{n}\,|W_n| \underset{n\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

Comme W_n est positif par positivité de l'intégrale, on a :

$$W_n \underset{n\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Exercice 16

On fixe $k \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on écrit :

$$u_n = n^k \cdot \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{p}{n}\right)^k = n^{k+1} \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{p}{n}\right)^k}_{= v_n}$$

La quantité v_n est une somme de Riemann associée à la fonction continue $x \longmapsto x^k$ sur $[0,1]$. Ainsi :

$$v_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 x^k \, dx = \frac{1}{k+1}$$

On en déduit $v_n \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{1}{k+1}$ puis, par produit :

$$u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{n^{k+1}}{k+1}$$

Exercice 17

Soit $F : x \longmapsto e^{-Kx}\int_0^x f(t)\,dt$ définie sur $\mathbb{R}_*^+$. La fonction $x \longmapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$ d'après le théorème fondamental de l'analyse puisque f est continue sur $\mathbb{R}_*^+$. On en déduit que F est C^1 sur $\mathbb{R}_*^+$ et le calcul de sa dérivée donne, avec l'hypothèse de l'énoncé :

$$\forall x>0,\ F'(x) = -Ke^{-Kx}\int_0^x f(t)\,dt + e^{-Kx}f(x)$$

$$= e^{-Kx}\underbrace{\left[f(x) - K\int_0^x f(t)\,dt\right]}_{\leqslant 0} \leqslant 0$$

On en déduit que F est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $F(0) = 0$, il vient que F est négative sur $\mathbb{R}^+$. Cela donne :

$$\forall x \geqslant 0,\quad e^{-Kx}\int_0^x f(t)\,dt \leqslant 0$$

Le terme exponentiel étant strictement positif, cela donne :

$$\forall x \geqslant 0,\quad \int_0^x f(t)\,dt \leqslant 0$$

La fonction f étant positive sur $\mathbb{R}^+$, $\int_0^x f(t)\,dt$ est une quantité positive par positivité de l'intégrale étant donné que x est positif. Ainsi :

$$\forall x \geqslant 0,\quad \int_0^x f(t)\,dt = 0$$

En dérivant cette relation (la dérivabilité sur $\mathbb{R}^+$ s'obtient encore une fois avec le théorème fondamental de l'analyse), on obtient :

$$\forall x \geqslant 0,\quad f(x) = 0$$