RÉVISIONS D'ALGÈBRE

T.D. N°0B

EXERCICE 1 ●○○ *Puissances de matrices*

On introduit les deux matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer A^k puis B^k.
2. Justifier que B est inversible et donner B^{-1}.

EXERCICE 2 ●●○ *Polynôme annulateur en dimension 2*

1. On se donne une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   - A. Prouver que $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = 0$.
   - B. On suppose $ad - bc \neq 0$. Grâce à la relation précédente, justifier que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_2.
2. On travaille maintenant avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   - A. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, effectuer la division euclidienne de X^k par $X^2 - X - 2$.
   - B. En déduire A^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 3 ●○○ *Bases de sous-espaces vectoriels*

Justifier que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en donner une base et la dimension :

1. $F = \mathrm{Vect}((1,2,3),(1,-1,3),(2,5,6))$
2. $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + 3z = 0\}$
3. $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ (X-2)^2 \text{ divise } P\}$
4. $K = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(1) = 0\}$

EXERCICE 4 ●●○ *Espaces vectoriels fonctionnels*

1. On se place sur le $\mathbb{R}$−espace vectoriel $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   - A. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ des réels. Étudier la liberté de la famille $(f_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ où :
   $$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = e^{\lambda_k x}$$
   - B. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, étudier la liberté de la famille $(g_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ où :
   $$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = \cos(kx)$$
   On pourra raisonner par récurrence et dériver deux fois pour l'hérédité.

2. On se place maintenant sur le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On introduit les fonctions $f_k : x \mapsto x^k$ de E pour $k \in \{0,1,2\}$ et on pose :

$$F = \left\{ f \in E,\quad \int_0^1 f(t)\,dt = 0,\quad f(0) = 0,\quad f'(1) = 0 \right\} \qquad \text{et} \qquad G = \{a f_0 + b f_1 + c f_2,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$$

   A. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E. Donner une base et la dimension de G.
   B. Prouver que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 5 ●●○ — *Itérés d'un endomorphisme*

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E vérifiant $f^2 - 3f + 2\mathrm{id}_E = 0$.

1. Montrer que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f et id_E.
2. Établir l'existence de deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad f^n = a_n f + b_n \mathrm{id}_E$$

3. Déterminer l'expression de a_n et b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. Retrouver les résultats des questions **2.** et **3.** en réalisant la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 ●●○ — *Noyau et image d'un endomorphisme*

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.

1. Démontrer les deux équivalences suivantes :

   A. $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f) \iff \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$
   B. $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f) \iff \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E$

2. Si l'on suppose de plus E de dimension finie, prouver que :

$$\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E \iff \mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f) \iff \mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$$

Exercice 7 ●○○ — *Études d'applications linéaires en petite dimension*

Dans les cas suivants, justifier que f est une application linéaire, donner une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$, écrire sa matrice dans les bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée et étudier si f est bijective.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, y-2z, z-2x) \end{array}$

2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P' + (X^2+1)P'' \end{array}$

3. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ P & \longmapsto & (P(1), P'(1)) \end{array}$

4. $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M + \mathrm{Tr}(M) I_2 \end{array}$

Exercice 8 ●●○ — *Études d'applications linéaires en dimension quelconque*

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. On considère l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(a_0), P'(a_1), \ldots, P^{(n)}(a_n)) \end{array}$$

   A. Montrer que f est une application linéaire et donner sa matrice dans les bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée.
   B. Prouver que f est un isomorphisme.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) \end{array}$$

   a. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et donner sa matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
   b. Établir que A est inversible et exprimer A^{-1}.

Exercice 9 ●●○ — *Une récurrence linéaire d'ordre 3*

On note F l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$$

1. Monter que F est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.
2. On introduit l'application :

$$\varphi: \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1, u_2) \end{array}$$

   Démontrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire la dimension de F.
3. Déterminer une base de F.
   On pourra rechercher les suites géométriques de F.
4. Trouver toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F vérifiant $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $u_2 = 3$.

Exercice 10 ●●○ — *Endomorphismes nilpotents en dimension 3*

Soient E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.

1. Prouver que $f^2 = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
2. On suppose dans cette question que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.
   a. Grâce à la question précédente, donner la dimension du noyau et de l'image de f.
   b. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle l'endomorphisme f a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. On suppose maintenant que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.
   a. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle l'endomorphisme f a pour matrice :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   b. On introduit le commutant C_N de N en posant $C_N = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ \ MN = NM\}$.
   Prouver que $C_N = \mathrm{Vect}(I_3, N, N^2)$.

Exercice 11 ●●○ — *Endomorphismes de rang* 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{rg}(H) \leqslant 1$.

1. Montrer qu'il existe deux vecteurs colonnes $(U, V) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ tels que $H = U\,{}^tV$ et $\mathrm{Tr}(H) = {}^tVU$.
   En déduire que $H^2 = \mathrm{Tr}(H)H$.
2. Établir que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad HMH = \mathrm{Tr}(MH)H$$

Exercice 12 ●●○ *Projecteurs et symétries*

Soit E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel. On rappelle les définitions suivantes :

Définition 1

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$.

- On appelle *projection sur* F *parallèlement à* G l'unique endomorphisme p de E tel que :
$$\forall x \in F, \quad p(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in G, \quad p(x) = 0$$
- On appelle *symétrie par rapport à* F *parallèlement à* G l'unique endomorphisme s de E tel que :
$$\forall x \in F, \quad s(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in G, \quad s(x) = -x$$

1. On commence par redémontrer deux résultats importants concernant les projecteurs et les symétries.
   - **a.** Montrer que $p \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$.
   Dans ce cas, prouver que $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$ et que p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.
   - **b.** Montrer que $s \in \mathscr{L}(E)$ est une symétrie si et seulement si $s^2 = \mathrm{id}_E$.
   Dans ce cas, prouver que $E = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$ et que s est la symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.
2. Soient p et q deux projecteurs de E.
   - **a.** Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
   - **b.** On suppose que $p + q$ est effectivement un projecteur. Prouver que :
   $$\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im}(p) + \operatorname{Im}(q) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker}(p) \cap \operatorname{Ker}(q)$$
3. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :
$$v_1 = (1,1,2), \qquad v_2 = (-2,-1,3) \qquad \text{et} \qquad v_3 = (0,-3,-1)$$
et on pose $F = \operatorname{Vect}(v_1, v_2)$ et $G = \operatorname{Vect}(v_3)$.
   - **a.** Montrer que $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on dire des sous-espaces F et G ?
   - **b.** Soit p la projection sur F parallèlement à G. Calculer la matrice M de p dans la base $\mathscr{B}$.
   - **c.** En notant $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, donner la matrice N de p dans la base $\mathscr{C}$.
   - **d.** Donner la matrice de passage P de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$ et donner une relation entre M, N et P.
4. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :
$$v_1 = (1,-1,-3), \qquad v_2 = (1,0,3) \qquad \text{et} \qquad v_3 = (2,-1,1)$$
et on pose $F = \operatorname{Vect}(v_1)$ et $G = \operatorname{Vect}(v_2, v_3)$.
   - **a.** Montrer que $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on dire des sous-espaces F et G ?
   - **b.** Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Calculer la matrice S de s dans la base $\mathscr{B}$.
   - **c.** En notant $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, donner la matrice de passage P de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$.
   - **d.** En déduire la matrice T de s dans la base $\mathscr{C}$.

Exercice 13 ●●○ *Centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit $Z_n(\mathbb{K})$ le centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui est défini par :
$$Z_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \ \forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \ AM = MA\}$$
Déterminer $Z_n(\mathbb{K})$.
On pourra travailler avec les matrices élémentaires $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.