

T.D. N°0



EXERCICE 1 ••• Puissances de matrices

- On désigne par A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
 - Exprimer A^3 en fonction de A^2 et A .
 - Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple $(a_k, b_k) \in \mathbb{K}^2$ tel que $A^k = a_k A + b_k A^2$.
 - Déterminer a_k puis b_k en fonction de $k \in \mathbb{N}^*$.
En déduire les puissances A^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.
- On désigne par B la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ définie par $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
 - On introduit J la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1. Donner J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
 - En exprimant B en fonction de J , calculer B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 2 ••• Espace vectoriel des fonctions

On se place sur le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

- Étudier la liberté de la famille $(f_k)_{1 \leq k \leq n}$ où, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, f_k est définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = |x - k|$$
- Soient $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ des réels. Étudier la liberté de la famille $(h_k)_{1 \leq k \leq n}$ où, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, h_k est définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h_k(x) = e^{\lambda_k x}$$
- On définit $F = \{f \in E, f \text{ bornée}\}$ et $G = \{f \in E, f(0) = 0\}$.
Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
Montrer que $E = F + G$. Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

EXERCICE 3 ••• Espace vectoriel des polynômes

On se place sur le \mathbb{K} -espace vectoriel $E = \mathbb{K}_n[X]$ des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} de degré au plus $n \geq 1$.

- On fixe $a, b \in \mathbb{K}$, montrer que l'ensemble des polynômes de E dont a et b sont des racines est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base et la dimension.
- On définit $F = \{P \in E, P(0) = P(1) = 0\}$ et $G = \{P \in E, \deg(P) \leq 1\}$.
Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
Démontrer que $E = F \oplus G$.

EXERCICE 4 ••• Ensemble des suites 3-périodiques

On se place sur le \mathbb{K} -espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ des suites à valeurs dans \mathbb{K} . On définit F le sous-ensemble de E formé par les suites 3-périodiques, c'est-à-dire :

$$F = \{u \in E, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_n\}$$

1. Établir que F est un sous-espace vectoriel de E .
2. On introduit l'application $\varphi : F \rightarrow \mathbb{K}^3$ définie par :

$$\forall u \in F, \quad \varphi(u) = (u_0, u_1, u_2)$$

Démontrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire la dimension de F .

3. Déterminer une base de F .
On pourra rechercher les suites géométriques de F .

EXERCICE 5 ●●○ Dérivation et intégration par l'algèbre

Dans le \mathbb{R} -espace vectoriel E des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on introduit le sous-ensemble :

$$F = \{x \mapsto (ax + b)e^{2x} + (cx + d)e^{-2x}, (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4\}$$

1. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base \mathcal{B} et la dimension.
2. On définit $\varphi : f \in F \mapsto f'$.
 - A. Vérifier que φ est un endomorphisme de F .
 - B. Déterminer $\text{Ker } \varphi$. L'endomorphisme φ est-il bijectif?

3. Déterminer la matrice M de l'endomorphisme φ dans la base \mathcal{B} .
4. Justifier que M est inversible puis calculer M^{-1} .

En déduire une primitive de la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = 3xe^{2x} - (5x - 1)e^{-2x}$$

5. Déterminer l'expression de M^n pour $n \geq 1$.
En déduire la dérivée n -ème de la fonction h définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = (2x - 5)e^{2x} + 4xe^{-2x}$$

EXERCICE 6 ●●○ Un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$

On se place sur le \mathbb{K} -espace vectoriel $E = \mathbb{K}_n[X]$ des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} de degré au plus n . On fixe $a \in \mathbb{K}$ et on définit l'application φ sur E en posant :

$$\forall P \in E, \quad \varphi(P) = (X - a)(P'(X) + P'(a)) - 2(P(X) - P(a))$$

1. Démontrer que φ est un endomorphisme de E .
2. Calculer $(\varphi(P))''$ pour $P \in E$ et en déduire $\dim \text{Ker } \varphi \leq 3$.
3. Démontrer que $\varphi(P)$ est divisible par $(X - a)^3$ pour tout $P \in E$.
4. Déterminer $\text{Ker } \varphi$ et $\text{Im } \varphi$.

EXERCICE 7 ●●○ Interpolation de Lagrange

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts. On introduit pour la suite l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(a_0), \dots, P(a_n)) \end{aligned}$$

1. Démontrer que l'application φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. En déduire que pour $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{K}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
3. Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on définit le polynôme :

$$L_i(X) = \prod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq i}} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}$$

Démontrer que (L_0, L_1, \dots, L_n) est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

4. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Donner la décomposition de P dans la base (L_0, L_1, \dots, L_n) de $\mathbb{K}_n[X]$.

EXERCICE 8 ●●○ *Endomorphismes vérifiant $f^3 = \text{id}_E$*

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme vérifiant $f^3 = \text{id}_E$.

1. Montrer que f est inversible et donner f^{-1} .
2. Prouver que $\text{Im}(f - \text{id}_E) \subset \text{Ker}(f^2 + f + \text{id}_E)$.
3. En déduire que $E = \text{Im}(f - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f - \text{id}_E)$.
4. Déterminer explicitement la décomposition d'un vecteur x de E sur cette somme directe.

EXERCICE 9 ●○○ *Projecteurs et symétries*

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On rappelle les définitions suivantes :

DÉFINITION 1

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$.

- On appelle *projection sur F parallèlement à G* l'unique endomorphisme p de E tel que :

$$\forall x \in F, \quad p(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in G, \quad p(x) = 0$$

- On appelle *symétrie par rapport à F parallèlement à G* l'unique endomorphisme s de E tel que :

$$\forall x \in F, \quad s(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in G, \quad s(x) = -x$$

DÉFINITION 2

- On dira que $p \in \mathcal{L}(E)$ est une *projection* ou un *projecteur* s'il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G de E tels que p soit la projection sur F parallèlement à G .
- On dira que $s \in \mathcal{L}(E)$ est une *symétrie* s'il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G de E tels que s soit la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

1. Montrer que $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$.
Dans ce cas, prouver que $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ et que p est la projection sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$.
2. Montrer que $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie si et seulement si $s^2 = \text{id}_E$.
Dans ce cas, prouver que $E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$ et que s est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$.
3. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. On pose $q = \text{id}_E - p$. Montrer que q est un projecteur et spécifier $\text{Ker } q$ et $\text{Im } q$ en fonction de $\text{Ker } p$ et $\text{Im } p$.
4. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq b$ tels que $(f - a \text{id}_E) \circ (f - b \text{id}_E) = 0$.

On pose :

$$p = \frac{1}{b-a}(f - a \text{id}_E) \quad \text{et} \quad q = \frac{1}{a-b}(f - b \text{id}_E)$$

- A. Montrer que p et q sont des projecteurs de E vérifiant $p \circ q = q \circ p = 0$.
- B. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer f^n en fonction de a, b et p, q .

EXERCICE 10 ●●○ *Matrices à diagonale dominante*

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice vérifiant :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|$$

Montrer que A est inversible.

EXERCICE 11 ●●● *Centres de $GL_n(\mathbb{K})$ et de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*

1. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n . On note M sa matrice dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E .
 - A. Comparer M et la matrice de u dans la base $\mathcal{B}' = (-e_1, e_2, \dots, e_n)$.
 - B. Comparer M et la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'' = (e_2, e_1, e_3, \dots, e_n)$.
 - C. Déterminer tous les endomorphismes de E dont les matrices sont indépendantes de la base choisie.
2. En déduire les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $GL_n(\mathbb{K})$.
3. Sans utiliser le résultat précédent, déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pourra travailler avec les matrices élémentaires $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.

EXERCICE 12 ●●● *Dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$*

Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie et G un sous-espace vectoriel de E . On définit :

$$H = \{u \in \mathcal{L}(E, F), G \subset \text{Ker } u\}$$

Démontrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$ et déterminer sa dimension.