Exercice 2

1. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0$.

Cela donne :

$$\underbrace{\lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n}_{\text{dérivable en } 1} = \underbrace{-\lambda_1 f_1}_{\substack{\text{non dérivable en } 1 \\ \text{sauf si } \lambda_1 = 0}}$$

Pour que cette égalité soit valide, il faut que $\lambda_1 = 0$.

En itérant ce procédé, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ et la famille est libre.

2. Soit $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mu_1 h_1 + \dots + \mu_n h_n = 0$.

Cela donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mu_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + \mu_n e^{\lambda_n x} = 0$$

Et donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mu_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_n)x} + \dots + \mu_{n-1} e^{(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x} + \mu_n = 0$

(en divisant par $e^{\lambda_n x}$)

Comme $\lambda_1 - \lambda_n < 0, \dots, \lambda_{n-1} - \lambda_n < 0$ par hypothèse, il vient en passant à la limite lorsque $x \to +\infty$: $\mu_n = 0$.

En itérant ce procédé, $\mu_1 = \dots = \mu_n = 0$ et la famille est libre.

3. On prouve facilement que F et G sont des s.e.v. de E par la propriété de caractérisation des s.e.v.

Soit $f \in E$. On peut écrire : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \underbrace{f(0)}_{u(x)} + \underbrace{f(x) - f(0)}_{v(x)}$

Ainsi f est la somme de u qui est constante donc bornée et de v qui vérifie $v(0) = 0$. Cela prouve $E = F + G$.

La somme n'est en revanche pas directe puisque la fonction sinus est non nulle et à la fois dans F et dans G.

Exercice 3

1. On suppose $a \neq b$. On a : $F = \{P \in \mathbb{K}_n[X],\ P(a) = P(b) = 0\}$

$$= \{P \in \mathbb{K}_n[X],\ \exists Q \in \mathbb{K}_{n-2}[X],\ P = (X-a)(X-b)Q\}$$

$$= \{(X-a)(X-b)Q(X),\ Q \in \mathbb{K}_{n-2}[X]\}$$

$$= \left\{\sum_{k=0}^{n-2} a_k (X-a)(X-b)X^k,\ (a_0, \dots, a_{n-2}) \in \mathbb{K}^{n-1}\right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\Big(\underbrace{\{(X-a)(X-b)X^k,\ k \in [\![0, n-2]\!]\}}_{\mathcal{F}}\Big).$$

Ainsi F est un sous-ev de E

et $\mathcal{F}$ en est une famille génératrice. Les éléments de $\mathcal{F}$ étant

non nuls et étagés en degré, $\mathcal{F}$ est aussi libre et c'est une base de F.

On en déduit $\dim F = n-1$.

Si $a = b$, une base de F est $\{(X-a)X^k,\ k \in [\![0, n-1]\!]\}$ et $\dim F = n$.

2. On sait que F est un sev de dimension $n-1$ d'après 1. et $G = \mathrm{Vect}(1, X)$ est un sev de dimension 2 car $(1, X)$ est libre.

- On remarque que $\dim F + \dim G = n-1 + 2 = n+1 = \dim E$.
- De plus, si $P \in F \cap G$ alors $P(X) = aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$

puisque $P \in G$ et $P(0) = P(1) = 0$ puisque $P \in F$. Cela donne :
$b = 0$ et $a + b = 0$, c'est-à-dire $a = b = 0$ et donc $P = 0$.
On vient de justifier que $F \cap G = \{0\}$.

Les deux points précédents permettent d'affirmer que $E = F \oplus G$.

Exercice 4

1. On utilise la caractérisation des sev :

- La suite nulle est bien dans F
- Si $(u, v) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors :

  $\forall n \in \mathbb{N},\ (\lambda u + v)_{n+3} = \lambda u_{n+3} + v_{n+3} = \lambda u_n + v_n = (\lambda u + v)_n$

  donc $\lambda u + v \in F$.

Finalement, F est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. La linéarité de φ est évidente.

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$.

- Si $u \in F$ vérifie $\varphi(u) = (a,b,c)$ alors $u_0 = a$, $u_1 = b$ et $u_2 = c$.
  Comme de plus u est 3-périodique, on a :
  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{3n} = a, \quad u_{3n+1} = b, \quad u_{3n+2} = c.$
  Ainsi, si il y a existence d'un antécédent de (a,b,c) par φ, celui-ci est unique.

- Enfin, on prouve l'existence d'un antécédent de (a,b,c) par φ en posant : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{3n} = a, \quad u_{3n+1} = b, \quad u_{3n+2} = c.$
  On a bien $u \in F$ et $\varphi(u) = (u_0, u_1, u_2) = (a,b,c)$.

Finalement, on a prouvé l'existence et l'unicité d'un antécédent de $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$ par φ : φ est bijective.

On en déduit alors : $\dim F = \dim \mathbb{K}^3 = 3$ (Thm. du rang)

3. La suite $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans F ssi $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda^{n+3} = \lambda^n$

Cela donne, si $\lambda \neq 0$, la relation $\lambda^3 = 1$ i.e. λ racine 3^e de 1.

<u>Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$</u> Soit $j = e^{2i\pi/3}$

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1, \quad v_n = j^n, \quad w_n = j^{2n}$

Les suites u, v, w sont clairement dans F et on peut vérifier qu'elles forment une famille libre. Comme $\dim F = 3$ et que $\mathrm{Card}\,(u,v,w) = 3$, c'est une base de F.

<u>Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$</u>

Les suites v et w précédentes ne sont pas réelles.... On peut penser à poser :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1, \quad v_n = \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right), \quad w_n = \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$

Les suites u, v, w sont clairement dans F et on peut vérifier qu'elles forment une famille libre. Comme $\dim F = 3$ et que $\mathrm{Card}\,(u,v,w) = 3$, c'est une base de F.

Exercice 6

1. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a : $\varphi(P) = \underbrace{(X-a)}_{\deg \leq 1}\underbrace{(P'(X)+P'(a))}_{\deg \leq n-1} - 2\underbrace{(P(X)+P(a))}_{\deg \leq n} \in \mathbb{R}_n[X]$.

De plus, on prouve facilement que φ est linéaire.

2. Soit $P \in E$. On a : $\varphi(P)' = P'(X) + P'(a) + (X-a)P''(X) - 2P'(X)$

puis : $\varphi(P)'' = P''(X) + P''(X) + (X-a)P'''(X) - 2P'(X)$
$= (X-a)P'''(X)$

Soit maintenant $P \in \ker\varphi$. On a $\varphi(P) = 0$ donc $\varphi(P)'' = 0$ c'est-à-dire $(X-a)P'''(X) = 0$ d'après le calcul précédent.
Ainsi $P''' = 0$ et $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On a prouvé que $\ker\varphi \subset \mathbb{R}_2[X]$.
En passant aux dimensions, il vient : $\dim\ker\varphi \leq 3$.

3. On a $(X-a)^3 \mid \varphi(P) \iff \varphi(P)(a) = \varphi(P)'(a) = \varphi(P)''(a) = 0$
Or : $\varphi(P)(a) = 0$ par définition de $\varphi(P)$ et $\varphi(P)'(a) = 0$
et $\varphi(P)''(a) = 0$ grâce aux calculs de $\varphi(P)'$ et $\varphi(P)''$ menés à la question précédente. On a donc bien $(X-a)^3 \mid \varphi(P)$.

4. Avec la question précédente, on a :

$$\operatorname{Im}\varphi \subset \left\{ (X-a)^3 Q(X),\ Q \in \mathbb{R}_{n-3}[X] \right\}$$
$$= \left\{ \sum_{k=0}^{n-3} a_k (X-a)^3 X^k,\ (a_k)_{0\leq k\leq n-3} \in \mathbb{R}^{n-2} \right\}$$
$$= \operatorname{Vect}\underbrace{\left((X-a)^3, X(X-a)^3, \dots, X^{n-3}(X-a)^3\right)}_{\mathcal{F}} = F$$

La famille $\mathcal{F}$ est libre car étagée en degré de sorte que $\mathcal{F}$ est une base de F. On en déduit $\dim F = n-2$ puis $\dim \operatorname{Im}\varphi \leq n-2$.
Par le théorème du rang, on a $\dim\ker\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = n+1$

Comme $\dim \operatorname{Im} \varphi \leqslant n-2$ et $\dim \ker \varphi \leqslant 3$, on doit avoir :

$$\dim \operatorname{Im} \varphi = n-2 \quad \text{et} \quad \dim \ker \varphi = 3.$$

Par inclusion et égalité des dimensions, on a donc :

$\operatorname{Im} \varphi = F = \operatorname{Vect}\left((X-a)^3, \dots, (X-a)^3 X^{n-3}\right)$ et $\ker \varphi = \mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 7

1. La linéarité de φ est évidente.

Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $\varphi(P) = 0_{\mathbb{K}^{n+1}}$. Cela donne que $P(a_0) = \dots = P(a_n) = 0$. Ainsi P admet $n+1$ racines distinctes (les $(a_i)_{0\leqslant i \leqslant n}$) et, étant de degré au plus n, il est nul.

On a prouvé $\ker \varphi = \{0\}$ et φ est donc injective.

Comme les espaces de départ et d'arrivée ont mêmes dimensions, φ est aussi bijective.

2. Ce n'est qu'une reformulation du fait que φ soit bijective de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}^{n+1}$.

3. La famille $\mathcal{L} = (L_0, \dots, L_n)$ a $n+1 = \dim \mathbb{K}_n[X]$ éléments.

De plus, elle est libre. En effet, si $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ vérifie :

$$\lambda_0 L_0 + \dots + \lambda_n L_n = 0 \qquad (*)$$

alors on peut prouver que $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$. Pour ce faire, on remarque que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad L_i(a_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

On fixe alors $j \in [\![1,n]\!]$ quelconque et on applique $(*)$ en a_j.

Il vient immédiatement : $\lambda_j = 0$. Ceci valant pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on a la liberté souhaitée et $\mathcal{L}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

4. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ que l'on décompose dans $\mathcal{L}$ sous la forme :

$$P = \lambda_0 L_0 + \dots + \lambda_n L_n$$

En appliquant cette relation en a_j pour $j \in [\![1,n]\!]$, on a $\lambda_j = P(a_j)$.

On en déduit que $P = P(a_0)L_0 + \dots + P(a_n)L_n$.

Exercice 8

1. On a $f \circ f^2 = f^3 = id_E$ et $f^2 \circ f = f^3 = id_E$ donc f est inversible avec $f^{-1} = f^2$.

2. Soit $y \in \mathrm{Im}(f - id_E)$ que l'on écrit $y = f(x) - x$ avec $x \in E$.
On a alors :

$$\begin{aligned}(f^2 + f + id_E)(y) &= f^2(y) + f(y) + y \\ &= f^2(f(x) - x) + f(f(x) - x) + f(x) - x \\ &= f^3(x) - f^2(x) + f^2(x) - f(x) + f(x) - x \\ &= f^3(x) - x = 0 \quad \text{car } f^3 = id_E.\end{aligned}$$

Ainsi $y \in \ker(f^2 + f + id_E)$, d'où l'inclusion souhaitée.

3. Le théorème du rang donne $\dim(E) = \dim \mathrm{Im}(f - id_E) + \dim \ker(f - id_E)$.
Pour prouver cette décomposition en somme directe de E, il suffit donc de prouver que $\mathrm{Im}(f - id_E) \cap \ker(f - id_E) = \{0\}$. On se donne $x \in \mathrm{Im}(f - id_E) \cap \ker(f - id_E)$. On a :

1.) $f(x) = x$ car $x \in \ker(f - id_E)$

2.) $f^2(x) + f(x) + x = 0$ car $x \in \mathrm{Im}(f - id_E) \subset \ker(f^2 + f + Id_E)$.

En remplaçant 1.) dans 2.), on obtient $3x = 0$ et donc $x = 0$ comme souhaité.

4. Soit $x \in E$. On cherche à écrire x sous la forme $x = u + v$ avec $u \in \mathrm{Im}(f - id_E)$ et $v \in \ker(f - id_E)$. On réalise une analyse.
Si $x = u + v$ avec $u \in \mathrm{Im}(f - id_E)$ et $v \in \ker(f - id_E)$ alors

en composant par f il vient $f(x) = f(u) + f(v)$

$$= f(u) + v$$

De même, on obtient $f^2(x) = f^2(u) + v$. On a donc :

$$\begin{cases} x = u+v \\ f(x) = f(u)+v \\ f^2(x) = f^2(u)+v \end{cases}$$

En faisant la somme, et en utilisant $u \in \mathrm{Im}(f-id_E) \subset \ker(f^2+f+id_E)$, il vient :

$$x + f(x) + f^2(x) = 3v$$

On en déduit : $v = \frac{1}{3}\left(x + f(x) + f^2(x)\right)$

puis : $u = x - v = \frac{1}{3}\left(2x - f(x) - f^2(x)\right)$

Exercice 9

1. et 2. Voir le cours de première année.

3. On a déjà : $q^2 = (id_E - p)^2 = p^2 - 2p + id_E = p - 2p + id_E$ car $p^2 = p$

$= id_E - p = q$

Ainsi q est un projecteur.

- $\ker q$ Soit $x \in \ker q$, on a $q(x) = 0$ soit $x - p(x) = 0$ et $x = p(x)$.

  Ainsi $\ker q \subset \operatorname{Im} p$.

  Réciproquement, si $y = p(x) \in \operatorname{Im} p$ alors on a :

  $q(y) = y - p(y) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0$

  Ainsi $\operatorname{Im} p \subset \ker q$.

  On a montré que $\ker q = \operatorname{Im} p$.

- $\operatorname{Im} q$ Soit $y = q(x) \in \operatorname{Im} q$. On a $p(y) = p(q(x)) = p(x - p(x))$

  $= p(x) - p^2(x) = 0$

  Ainsi $\operatorname{Im} q \subset \ker p$.

  Soit $x \in \ker p$, alors $p(x) = 0$ soit $x - q(x) = 0$ et $x = q(x)$.

  Ainsi $\ker p \subset \operatorname{Im} q$.

  On a prouvé que $\operatorname{Im} q = \ker p$.

4.a. On a : $p^2 = \frac{1}{(b-a)^2}(f - a\,Id_E)^2 = \frac{1}{(b-a)^2}(f^2 - 2af + a^2 id_E)$

Or on sait que $(f - a\,id_E) \circ (f - b\,Id_E) = 0$, ce qui donne :

$$f^2 - af - bf + ab\,Id_E = 0 \qquad (*)$$

On reprend le calcul précédent :

$$p^2 = \frac{1}{(b-a)^2}(f^2 - 2af + a^2 id_E)$$

$$= \frac{1}{(b-a)^2}(bf - ab\,Id_E - af + a^2 Id_E)$$

$$= \frac{1}{(b-a)^2}((b-a)f - a(b-a)Id_E)$$

$$= \frac{1}{b-a}(f - a\mathrm{Id}_E) = p$$

Ainsi p est un projecteur. On démontre de même que q est un projecteur.

De plus, on a :

$$p \circ q = \frac{1}{b-a}(f - a\mathrm{id}_E) \circ \frac{1}{a-b}(f - b\mathrm{id}_E)$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{a-b} (f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\mathrm{id}_E) = 0 \quad \text{par } (*)$$

et $$q \circ p = \frac{1}{a-b}(f - b\mathrm{id}_E) \circ \frac{1}{b-a}(f - a\mathrm{id}_E)$$

$$= \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{b-a} (f - b\mathrm{id}_E) \circ (f - a\mathrm{Id}_E)$$

$$= \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{b-a} (f - a\mathrm{id}_E) \circ (f - b\mathrm{Id}_E)$$ car $f - a\mathrm{id}_E$ et $f - b\mathrm{id}_E$ commutent

$$= 0 \quad \text{par } (*)$$

4.b. On remarque que $f^0 = \mathrm{id}_E = p + q$.

De plus, on a par définition de p, on a :

$$f = (b-a)p + a\mathrm{id}_E = (b-a)p + a(p+q)$$
$$= bp + aq$$

On conjecture que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = b^n p + a^n q$.

On le prouve par récurrence.

Initialisation : Le cas $n = 0$ a été vu plus haut.

Hérédité : Si $f^n = b^n p + a^n q$ alors, avec $f = bp + aq$ qui a été prouvé ci-dessus, on a :

$$f^{n+1} = f \circ f^n = (bp + aq) \circ (b^n p + a^n q)$$
$$= b^{n+1} p + a^{n+1} q \quad \text{car } p \circ q = q \circ p = 0$$

D'où le résultat souhaité par principe de récurrence.

Exercice 10

On suppose, par l'absurde, que A n'est pas inversible. En notant $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes, on sait alors que cette famille de vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est liée. Il existe donc des scalaires non tous nuls $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que :

$$\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_n C_n = 0$$

On pose alors $M = \max_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j|$ et on note $j_0 \in [\![1,n]\!]$ l'indice pour lequel $M = |\lambda_{j_0}|$. On remarque que $M > 0$ puisque les $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ ne sont pas tous nuls. Pour $j \in [\![1,n]\!] \setminus \{j_0\}$, on pose $\mu_j = \frac{\lambda_j}{M}$.
En divisant la relation précédente par M et en isolant le terme relatif à j_0, il vient :

$$C_{j_0} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{n} \mu_j C_j$$

Sur la ligne j_0 de cette relation, on obtient :

$$a_{j_0,j_0} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{n} \mu_j a_{j_0,j}$$

Or on a $|\mu_j| \leq 1$ pour $j \in [\![1,n]\!] \setminus \{j_0\}$ par construction donc, par inégalité triangulaire :

$$|a_{j_0,j_0}| = \left| -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{n} \mu_j a_{j_0,j} \right|$$

$$\leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{n} \underbrace{|\mu_j|}_{\leq 1} |a_{j_0,j}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{n} |a_{j_0,j}|$$

Mais par hypothèse, on a :

$$|a_{j_0,j_0}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{n} |a_{j_0,j}|$$

Ceci est donc absurde et A est inversible.

Exercice 11

1.A. Après calculs, on passe de M à $M_{B'}(u)$ en opposant tous les termes en dehors de la diagonale des colonne et ligne d'indice 1.

1.B. On trouve cette fois que pour passer de M à $M_{B''}(u)$, on échange les deux premières lignes puis les deux premières colonnes (ou inversement, ces opérations commutent) de M.

1.C Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commute avec toutes les matrices de $GL_n(\mathbb{K})$.

On fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et on note $u \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme de E tel que $M_{\mathcal{B}}(u) = M$.

Si $\widetilde{\mathcal{B}}$ est une autre base de E alors la matrice de u dans $\widetilde{\mathcal{B}}$ est (formule du changement de base)

$$P_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}}^{-1} \, M \, P_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} = M \, P_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}}^{-1} \, P_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} = M$$

(car $MQ = QM$ si $Q \in GL_n(\mathbb{K})$)

Ainsi la matrice de u est la même dans toutes les bases de E.

- Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$.

  On pose $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, -e_i, \dots, e_n)$. De façon analogue à 1.A, on prouve que $M_{\mathcal{B}'}(u)$ s'obtient en opposant les termes hors diagonale des ligne et colonne d'indice i de M. Mais $M_{\mathcal{B}'}(u) = M$ donc on a, puisque $i \neq j$ (hors diagonale) : $m_{ij} = -m_{ij} \iff m_{ij} = 0$.

  On en déduit que M est diagonale.

- Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

  On pose $\mathcal{B}'' = (e_i, e_2, \dots, e_{i-1}, e_1, e_{i+1}, \dots, e_n)$. De façon analogue à 1.B., on prouve que $M_{\mathcal{B}''}(u)$ s'obtient en échangeant les lignes d'indices 1 et i puis les colonnes d'indices 1 et i (ou l'inverse) de M. Mais $M_{\mathcal{B}''}(u) = M$, ce qui donne $m_{ii} = m_{11}$.

  Ainsi tous les coefficients diagonaux de M sont les mêmes.

En conclusion, M est de la forme λI_n où $\lambda \in \mathbb{K}$, ce qui donne que $u = \lambda Id_E$.

Réciproquement, si $u = \lambda Id_E$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, on vérifie facilement que la matrice de u est la même dans n'importe quelle base de E.

3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

En particulier : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad ME_{ij} = E_{ij}M$.

Pour $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$, cela donne :

$$(ME_{ij})_{k,l} = (E_{ij}M)_{k,l}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{p=1}^{n} m_{kp} \underbrace{(E_{ij})_{pl}}_{= \delta_{pi}\delta_{jl}} = \sum_{p=1}^{n} \underbrace{(E_{ij})_{kp}}_{= \delta_{ik}\delta_{jp}} m_{pl}$$

$$\Leftrightarrow \quad m_{ki}\,\delta_{jl} = \delta_{ik}\, m_{jl}$$

Ainsi :
- en choisissant $k \neq i$ et $j = l$: $m_{ki} = 0$
- en choisissant $k = i$ et $j = l$: $m_{ii} = m_{jj}$

On en déduit que M est de la forme λI_n.

Réciproquement, toute matrice de la forme λI_n commute bien avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 12 (Indications)

- On prouve facilement que H est un sous-e.v. de $\mathcal{L}(E,F)$ par caractérisation des sous-e.v.

- On se donne S un supplémentaire de G dans E $(G \oplus S = E)$ et on note $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à cette décomposition en somme directe. On peut montrer que la matrice de tout élément u de H dans la base $\mathcal{B}$ peut s'écrire par blocs sous la forme :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \overbrace{\begin{pmatrix} \underbrace{0}_{\dim G} & C \end{pmatrix}}^{\dim E} \updownarrow \dim F$$

et que réciproquement tout endomorphisme $v \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ serait de cette forme vérifierait $G \subset \operatorname{Ker} v$ et appartiendrait donc à H.

Grâce à l'isomorphisme $u \in \mathcal{L}(E,F) \longmapsto M_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_{\dim F, \dim E}(\mathbb{K})$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \dim H &= \dim\left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 & C \end{pmatrix}, \ C \in \mathcal{M}_{\dim F, \dim E - \dim G}(\mathbb{K}) \right\}\right) \\ &= \dim F \cdot (\dim E - \dim G). \end{aligned}$$