

T.D. N°1



EXERCICE 1 ••• Étude de séries

Déterminer les natures des séries suivantes :

- | | | |
|---|--|---|
| 1. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 \ln n}$ | 7. $\sum_{n \geq 0} \ln \left(\frac{n^2 + n + 2}{n^2 + n + 1} \right)$ | 13. $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ |
| 2. $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln n}{n}$ | 8. $\sum_{n \geq 1} n^{-1 - \frac{1}{n}}$ | 14. $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1}}$ |
| 3. $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln n}{n^2}$ | 9. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{e^n n!}$ | 15. $\sum_{n \geq 1} \cos \left(n^2 \pi \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$ |
| 4. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$ | 10. $\sum_{n \geq 0} \ln \left(\cos \left(\frac{1}{n} \right) \right)$ | 16. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^{n+1}}} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$ |
| 5. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ | 11. $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ | 17. $\sum_{n \geq 1} \sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + 3} \quad (a \in \mathbb{R})$ |
| 6. $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n^2)}{n^2}$ | 12. $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n n}{n^3 + n + 1}$ | 18. $\sum_{n \geq 1} \left(n \operatorname{sh} \left(\frac{1}{n} \right) \right)^{-n^a} \quad (a \in \mathbb{R})$ |

EXERCICE 2 ••• Étude de séries et calculs de sommes

Déterminer les natures des séries suivantes et en calculer la somme en cas de convergence :

- | | | |
|--|---|--|
| 1. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ | 3. $\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{n!}$ | 5. $\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{2}{n(n+1)} \right)$ |
| 2. $\sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$ | 4. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 - 2}{n!}$ | 6. $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ |

EXERCICE 3 ••• Deux calculs de somme

1. On cherche à calculer la somme suivante :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

A. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, établir que :

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

On pourra séparer termes pairs et impairs dans le membre de gauche.

B. Justifier l'existence et donner la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

C. Conclure quant à la valeur de S.

2. On cherche maintenant à calculer la somme suivante :

$$T = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

- A. Justifier l'existence de T.
- B. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que :

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \ln \left(\frac{(2n)!(2n+1)!}{2^{4n}(n!)^4} \right)$$

On pourra séparer termes pairs et impairs dans le membre de gauche.

- c. En déduire finalement la valeur de T.

EXERCICE 4 ●●○ Règle de Raabe – Duhamel

On se donne $\alpha \in \mathbb{R}$ et une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels strictement positifs vérifiant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

1. On pose $v_n = \ln(n^\alpha u_n)$ pour $n \geq 1$.

- A. Prouver que :

$$v_{n+1} - v_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

- B. En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
- c. Conclure qu'il existe une constante $A > 0$ telle que :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{A}{n^\alpha}$$

2. On va prouver la *formule de Stirling*. Pour ce faire, on définit une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{e^n n!}{\sqrt{n} n^n}$$

- A. Prouver qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $n! \underset{+\infty}{\sim} C \sqrt{n} n^n e^{-n}$.
- B. En utilisant les intégrales de Wallis, démontrer que $C = \sqrt{2\pi}$.

3. Pour $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, on pose :

$$\forall n \geq 0, \quad w_n = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$$

Étudier la convergence absolue de la série de terme général w_n .

EXERCICE 5 ●●○ Termes généraux récurrents

1. On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en donnant $u_1 > 0$ et :

$$\forall n \geq 1, \quad u_{n+1} = \ln \left(1 + \frac{u_n}{n} \right)$$

- A. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien définie et que $u_n > 0$ pour tout $n \geq 1$.
- B. Établir que :

$$\forall n \geq 1, \quad u_{n+1} \leq \frac{u_n}{n}$$

c. Pour $\alpha > 0$, en déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n^\alpha$.

2. On définit une nouvelle suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en posant $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \geq 1, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{n}}$$

- A. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien définie et que $u_n \geq 1$ pour tout $n \geq 1$.
 B. Exprimer u_n^2 en fonction de $n \geq 1$ et de u_1 sous la forme d'une somme et en déduire un équivalent de u_n .
 c. En déduire la nature des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{u_n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{u_n}$.

3. On définit enfin une dernière suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en donnant $u_0 > 1$ et :

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1.$$

- A. Montrer que $u_n > 1$ pour tout $n \geq 0$ puis que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
 B. Prouver que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{u_n}$ converge et donner sa somme en fonction de u_0 .

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pourra calculer :

$$\frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1}$$

EXERCICE 6 ••○ Vitesse de convergence ou de divergence

Donner des équivalents lorsque n tend vers $+\infty$ des deux quantités suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \quad \text{et} \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

EXERCICE 7 ••○ Approximation de la somme d'une série

1. Justifier que les séries suivantes convergent :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n^3 + 1} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

2. Donner, sans la calculer, une approximation à 10^{-3} près de leurs sommes ; on proposera également un programme Python permettant d'obtenir une valeur approchée de cette approximation.

EXERCICE 8 ••• Une transformation d'Abel

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$S_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \sin(kx)$$

1. Simplifier l'expression de S_n lorsque $n \geq 1$ et en déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
 2. Démontrer que :

$$\forall n \geq 2, \quad \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{S_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k(k+1)}$$

3. En déduire la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n}$.

EXERCICE 9 ••• Une série dont le terme général est un reste

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

2. Si $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que :

$$R_n + R_{n-1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k-1)}$$

3. Déterminer un équivalent de R_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Donner la nature de la série de terme général R_n .