

T.D. n°10



EXERCICE 1 ••• Fonction de norme constante

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} . On note $\| \cdot \|_2$ la norme euclidienne de \mathbb{R}^n .

- On suppose que la norme de f est constante sur I .
Montrer que, pour tout $t \in I$, $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux.
- Montrer que la fonction $t \mapsto \|f(t)\|_2$ est dérivable en tout point $t_0 \in I$ vérifiant $f(t_0) \neq 0$.

EXERCICE 2 ••• Wronskien

Soient deux applications a et b continues sur un intervalle I de \mathbb{R} et on considère l'équation différentielle :

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{E}$$

On se donne y_1 et y_2 deux solutions de (E) et on définit la fonction $W : I \rightarrow \mathbb{R}$ en posant :

$$\forall t \in I, \quad W(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)$$

- Montrer que W est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
- En déduire une expression de W .

EXERCICE 3 ••• Coordonnées polaires

Soient r et θ des fonctions dérivables sur un intervalle I . On note, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $u(\alpha)$ le vecteur $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ de \mathbb{R}^2 . On considère alors la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie en coordonnées polaires par :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = r(t)u(\theta(t))$$

- Montrer que f est dérivable sur I et en donner la dérivée.
- Si l'on suppose de plus que r et θ sont deux fois dérivables, justifier que f est deux fois dérivable sur I et en donner la dérivée seconde.

EXERCICE 4 ••• Déplacement d'un point matériel dans le plan

On considère un point matériel en mouvement dans le plan. Sur l'intervalle de temps I , la position de ce point matériel à l'instant $t \in I$ est donnée par M_t .

- On suppose qu'à chaque instant le vecteur vitesse du point matériel est orthogonal à la droite (OM_t) .
Montrer que la trajectoire du point matériel est sur un cercle centrée en l'origine O .
- On suppose cette fois qu'à chaque instant le vecteur vitesse du point matériel est colinéaire à la droite (OM_t) .
Montrer que la trajectoire du point matériel est rectiligne.

EXERCICE 5 ••• Déplacement d'un point matériel dans l'espace

On considère un point matériel en mouvement dans l'espace. Sur l'intervalle de temps I , la position de ce point matériel à l'instant $t \in I$ est donnée par M_t . On suppose qu'à chaque instant le vecteur accélération du point matériel est colinéaire au vecteur $f(t) = \overrightarrow{OM_t}$.

- Montrer que la fonction $g : t \mapsto f(t) \wedge f'(t)$ est constante sur I .
- Si $g \neq 0$ sur I , montrer que la trajectoire du point matériel est plane.