# FONCTIONS VECTORIELLES



T.D. N°10

## Exercice 1 ●○○ — *Fonction de norme constante*

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On note $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

**1.** On suppose que la norme de $f$ est constante sur I.
Montrer que, pour tout $t \in \mathrm{I}$, $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux.

**2.** Montrer que la fonction $t \longmapsto \|f(t)\|_2$ est dérivable en tout point $t_0 \in \mathrm{I}$ vérifiant $f(t_0) \neq 0$.

## Exercice 2 ●○○ — *Wronskien*

Soient deux applications $a$ et $b$ continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et on considère l'équation différentielle :

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{E}$$

On se donne $y_1$ et $y_2$ deux solutions de (E) et on définit la fonction $\mathrm{W} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ en posant :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{W}(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_1'(t) \\ y_2(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

**1.** Montrer que W est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

**2.** En déduire une expression de W.

## Exercice 3 ●○○ — *Coordonnées polaires*

Soient $r$ et $\theta$ des fonctions dérivables sur un intervalle I. On note, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $u(\alpha)$ le vecteur $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ de $\mathbb{R}^2$. On considère alors la fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^2$ définie en coordonnées polaires par :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad f(t) = r(t)u(\theta(t))$$

**1.** Montrer que $f$ est dérivable sur I et en donner la dérivée.

**2.** Si l'on suppose de plus que $r$ et $\theta$ sont deux fois dérivables, justifier que $f$ est deux fois dérivable sur I et en donner la dérivée seconde.

## Exercice 4 ●●○ — *Déplacement d'un point matériel dans le plan*

On considère un point matériel en mouvement dans le plan. Sur l'intervalle de temps I, la position de ce point matériel à l'instant $t \in \mathrm{I}$ est donnée par $\mathrm{M}_t$.

**1.** On suppose qu'à chaque instant le vecteur vitesse du point matériel est orthogonal à la droite $(\mathrm{OM}_t)$.
Montrer que la trajectoire du point matériel est sur un cercle centrée en l'origine O.

**2.** On suppose cette fois qu'à chaque instant le vecteur vitesse du point matériel est colinéaire à la droite $(\mathrm{OM}_t)$.
Montrer que la trajectoire du point matériel est rectiligne.